Schwingungslehre in Kursstufe 12

Ein Unterrichtsversuch
unter Berücksichtigung musikalischer Aspekte

0 Stoffverteilung

	Thema	Versuche	Lernziele
1-3	**Physikalische Grundlagen (Harmonische, Fourierspektrum)**		
1	Stehende Wellen	▪ Gummiband	▪ Unterschiede fortschreitender und stehender Wellen ▪ Harmonische von stehenden Wellen
2	Fourier	▪ Akustische Schwebungen bei Harmonischen einer Rechteck-schwingung	▪ Prinzip und Vorgehensweise der Fouriersynthese ▪ Fourier ist kein mathematisches Spielzeug sondern Sinnesrealität
3+4	Fourier mit CoolEdit	▪ Grundlegende Handhabung von CoolEdit ▪ Klangsynthese und -analyse der fundamentalen periodischen Funktionen Sinus, Rechteck, Dreieck, Sägezahn ▪ Phase akustisch unbedeutend	▪ Synthese (graphisch) ▪ Synthese (akustisch) ▪ Analyse (FFT) desselben ▪ Wellenform interpretieren ▪ Verknüpfung der Klangfarbe mit Wellenform (rudimentär) ▪ grundlegende Wellenparameter (Frequenz, Amplitude, Phase) ▪ Ohmsches Gesetz der Akustik
5-8	**Praktische Anwendung / Akustische Relevanz (Klangerzeugung und -spektrum)**		

5	Saiten-instrumente	▪ Monochord
		▪ Grundtonparameter
		▪ Anregungsprinzip
		  ▪ gezupft / geschlagen
		  ▪ gestrichen
		  ▪ Rückkopplungsmodell (Holzklotz auf Reibungsband)
			▪ Wiederholung lineares Kraftgesetz
			▪ Analogie zum Federpendel (D / m)
			▪ Anregung bestimmt Schwingungs-form (= Fourierkomponenten)
			▪ Sägezahn (Geige)
			▪ Dreieck (Zupfinstrumente, Stimme)
			▪ Rückkopplung (phasenrichtige Anregung)

6	Blas-instrumente	▪ Heulrohr
		▪ Quinckscher Resonator
		▪ Kundtsches Rohr
		▪ Anschauungsmaterial
		  ▪ Lippenpfeife
		  ▪ Zungenpfeife
			▪ Schwingende Luftsäulen
			▪ Randbedingung bestimmt Eigenfrequenz
			▪ Anregungsmechanismus
			▪ Lippenpfeife (offenes Ende)
			▪ Zungenpfeife (geschlossenes Ende)
			▪ Resonanzbegriff
			▪ Überblick:
			  ▪ Anregungssystem
			  ▪ Resonanzsystem
			  ▪ Fourierspektrum

	Stimme	▪ Abtasten der Stimmlippen ▪ Abtasten der vokalbildenden Resonanzräume	▪ Analogie und Anwendung eines Modells (schwingende Luftsäule) auf Naturgegebenheit (Phonetik)

	Flächen- hafte Schallgeber	Chladnische Klangfiguren	▪ Anharmonische Vielfache ▪ Zweidimensionalität ▪ Knotenlinien als 2dim Knoten ▪ Vorbereitung auf Potentialtöpfe etc.
7+8	Klang- bzw. Fourier- analyse mit CoolEdit	▪ CoolEdit ▪ Frequenzbestimmung ▪ Oberschwingungen ▪ Frequenz-Amplitudenspektrum ▪ Zeit-Frequenz- Spektrum ▪ menschlische Sprache	▪ Sichtbarmachung der Obertöne ▪ Festigung des "Vertrauens" in diese Anschauungsweise ▪ Randbedingungen ⇒ Frequenzspektrum ▪ Frequenzspektrum ⇒ Klangeindruck
9/10	**Harmonie als Grundprinzip menschlicher Modellvorstellungen** (Physik als Modellvorstellung, Einfluß von menschlichen Harmonie- und Ordnungsprinzipien in die Modellierung, z.B. Kepler, Atommodell, Quantenmechanik)		
9	Harmonie / Konsonanz Tonleitern (event. 2 Std.)	▪ Monochord / Saitenverhältnisse ▪ viel, viel Bruchrechnen ▪ eventuell Trompete mitnehmen 3 Ventil Systeme ▪ Gitarre (Temp.Stimmung)	▪ pythagoräische Tonleiter (elementare konsonante Intervalle) ▪ Naturtonreihe (Blasinstrumente) ▪ Temperierte Stimmung (Logarithmik) ▪ Harmonie als Grundprinzip der Physik (Galilei, Kepler, Bohr)
10	CoolEdit	▪ verschiedene Tonleitern	
11 / 12	**Psychophysik als Verknüpfung subjektiv Sinneswahrnehmung mit objektiv messbaren Reizgrößen.**		

11	Weber
	Fechner
		▪ Hörphysiologie
		▪ Reizempfindungsschwellen für
		  ▪ Frequenz (Tonintervalle) und
		  ▪ Lautstärke (dB-Skala)
		▪ Weber-Fechnersches Gesetz
			▪ Grundgesetz Psychophysiologie: Weber-Fechner, angewandt auf
			  ▪ Lautstärke
			  ▪ Tonhöhe
			▪ Vergleich zur Optik

12	Akustische Täuschun- gen	CoolEdit Lehrervortrag	▪ Nichtlineares Kraftgesetz ▪ Grenzen d. Superpositionsprinzips ▪ Empfinden ≠ physikalischer Reiz

1 Fouriersynthese und Fourieranalyse

1.1 Stehende Wellen / Eigenschwingungen / Resonanz

- Bei **einfacher** Reflexion bildet sich immer eine stehende Welle vor der Wand aus
- Bei **mehrfacher** Reflexion nur unter bestimmten Bedingungen (Randbedingungen)

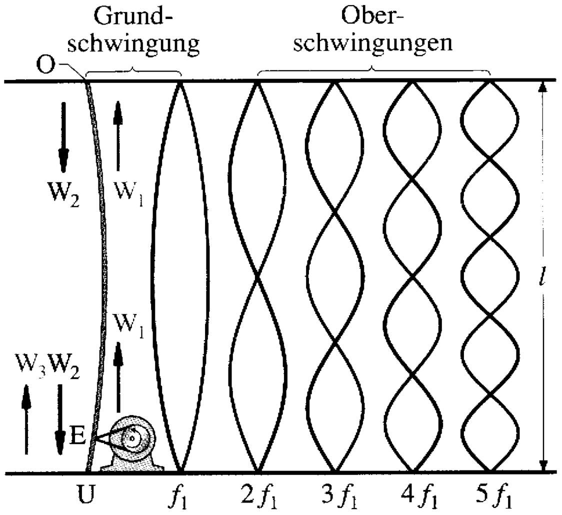
Versuch: Stehende Wellen mit Gummiband

- Gummiband
- verbunden mit Experimentiermotor
- angetrieben mit Sinusgenerator

- **Fortschreitende Welle** durch Gummiband laufen lassen mit Reflexion
- Frequenz langsam erhöhen

- Fortschreitende und stehende Welle neben-einander und **Unterschiede** aufschreiben **(a)**

- **Stehende Welle**
  - im Knoten packen ⇒ nix tut sich
  - im Bauch packen ⇒ zerstört die Welle
  - ⇒ Randbedingungen entscheidend **(b)**



1.1.1 Unterschiede zw. fortschreitenden und Stehenden Wellen

Fortschreitende Welle	Stehende Welle
▪ Kurvenbild **verschiebt sich** mit der Geschwindigkeit c	▪ Kurvenbild bleibt **räumlich fixiert**
▪ Alle Ortspunkte haben die **gleiche Bewegungsamplitude**. ▪ Alle Ortspunkte erreichen diese zeit-lich **nacheinander**	▪ Jeder Ortspunkt hat **unterschiedli-che Bewegungsamplituden.** ▪ Alle Ortpunkte erreichen ihre Amplitude **zur gleichen Zeit.**
▪ In keinem Moment ist überall **Stillstand** ▪ In keinem Moment ist überall die **Elongation** null	▪ In Moment größter Elongation ist überall **Stillstand**. ▪ Im gleichen Moment (alle T/2) ist überall die **Elongation** Null (und die Schnelle maximal)
▪ Jeder Ortpunkt innerhalb einer Wellenlänge hat **unterschiedliche Phase**	▪ Alle Ortspunkte innerhalb benachbarter Knoten haben die **gleiche Phase**. ▪ Zu beiden Seiten eines Knotens schwingen Ortspunkte **gegenphasig**.
▪ Kein Punkt ist ständig in Ruhe	▪ **Die Schnelleknoten ruhen ständig**
▪ **Energie schreitet fort**	▪ **Energie bleibt am Ort**, kein Energietransport

1.1.2 Eigenschwingungen (Harmonische) stehender Wellen

Versuchsaufbau abzeichnen lassen (siehe Bild)

- **1.Harmonische)** **f1**
- **k.te Harmonische** **f2, f3, f4, ...**

- **Randbedingung:** **Saitenenden sind Knoten der Bewegung**

Die Randbedingungen geben die Eigenschwingungen (Wellenlänge) vor

Besser den **Versuch waagrecht ablaufen lassen** und die Eigenschwingungen in eine Zeile:

		Zusammenhang zwischen	
Zeichnungen		Seillänge	Wellenlänge
	1. Harmonische	L = 1 (λ1 / 2)	λ1 = 2L / 1
	2. Harmonische	L = 2 (λ2 / 2)	λ2 = 2L / 2
	3. Harmonische	L = 3 (λ3 / 2)	λ3 = 2L / 3
	4. Harmonische	L = 4 (λ4 / 2)	λ4 = 2L / 4
	k. Harmonische	L = k (λk / 2)	λk = 2L / k

Aus c = f λ folgt für die Frequenz der

Oberschwingungen $f_k = \frac{c}{l_k} = c\left(\frac{k}{2L}\right) = k\left(\frac{c}{2L}\right) = kf_1$ für k = 1,2,3,4,...

zur Grundfrequenz $f_1 = \frac{c}{2L}$

d.h. die Frequenzen der Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz f_1.

Merksatz:

Sind die Enden eines Seils der Länge L **fest eingespannt** und damit **Schwingungsknoten**, so kann der Wellenträger nur zu sogenannten Eigenschwingungen angeregt werden.

Die Frequenz der Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz:

$f_k = kf_1$ mit $f_1 = \frac{c}{2L}$

Die Konstante c ist dabei die Geschwindigkeit,
mit der sich eine fortschreitende Welle auf dem Träger ausbreitet.

Frage: **Warum kommt da die Wellengeschwindigkeit c vor ?**
Bem.: (2L / c) ist die Zeit, die die fortschreitende Welle braucht,
um nach zweifacher Reflexion wieder phasenrichtig anzukommen.

Hausaufgabe:
Leiten Sie die Gleichung einer stehenden Welle aus der Überlagerung
zweier gegenläufiger eindimensionaler, fortschreitender Wellen gleicher Frequenz und Amplitude her.

von links nach rechts $s(t,x) = s \cdot \sin\left[2p\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{l}\right)\right]$

von rechts nach links $s(t,x) = s \cdot \sin\left[2p\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{l}\right)\right]$

Additionstheorem $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

Versuch: Stehende Längswellen mit Schraubenfeder
- Schwinger wird durch Gummiband am Tisch oder Stativfuß gehalten

1.1.3 Resonanz & Oberschwingungen beim Klavier (Musikraum) = Hausaufgabe für Freitag

- **Eigenschwingungen (Harmonische) in der Musik**
  - Grundschwingung (Musik: Grundton)
  - Oberschwingungen (Musik: Obertöne, Partialtöne)

- **Resonanz:**
  Wird ein zu Eigenschwingungen fähiger Wellenträger
  mit einer seiner Eigenfrequenzen angeregt, so tritt Resonanz auf

Überleitung zu den Saiteninstrumenten durch "Hausaufgabe"

- **Schwingungsanregung durch einen Oberton (Partialton)**
  d.h. eine Saite <u>kann</u> mit jeder ihrer Obertöne schwingen

  - Dämpfer von Grundton Saite (G) abheben
  - einzelne Harmonische von G (g, d1, g1, h1, d2, etc.)
    hart ("staccato") anspielen ⇒ G schwingt mit dieser Harmonischen
  - Zwischentöne anspielen (a, f, etc.)
    hart ("staccato") anspielen ⇒ G schwingt nicht !

- **Schwingungsanregung durch mehrere Obertöne**
  d.h. eine Saite schwingt <u>gleichzeitig</u> mit allen ihren Obertönen

  - Dämpfer von Grundton Saite (G) abheben
  - Akkord (d1, g1, h1) hart ("staccato") anspielen
    ⇒ G-Saite schwingt mit allen drei Harmonischen
  - Mit dem Unterarm alle Klaviertasten anspielen
    ⇒ G-Saite schwingt mit allen Harmonischen
    = Dominant-Sept-Akkord (g, d1, g1, h1, d2, f2, g2)

- **Schwingungsanregung eines Obertons durch den Grundton**
  - Dämpfer von oktavierter Saite (g) abheben
  - Grundton (G) hart anspielen
    ⇒ Oktavierte g-Saite schwingt mit eigenem Grundton (g)
    ⇒ G-Saite schwingt gleichzeitig mit allen ihren Harmonischen

- **Übergang zur Fouriersynthese**

1.2 Fourieranalyse und -synthese

EinstiegsVersuch
Akustische Analyse einer Rechteckschwingung (200 Hz) des Frequenzgenerators
durch Überlagerung mit Sinusschwingung
⇒ Schwebungserscheinungen bei den Obertönen (600Hz, 1000Hz)

Was kann man aussagen, wenn man bei höheren Frequenzen Schwebungen hört?

- In der Rechteckschwingung sind - zusätzlich zur Grundschwingung (200 Hz) Sinusschwingungen höherer Frequenz (600 Hz, 1000 Hz, 1400 Hz) verborgen

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830):

Jede beliebige periodische Funktion läßt sich in eindeutiger Weise aus harmonischen Funktionen (Sinus- und Kosinusfunktionen) zusammensetzen:

$$a(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\, c_n * \sin(n w_0 t + f_n)]$$

Bem*

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\, a_n * \sin(n w_0 t) + b_n * \cos(n w_0 t)\,]$$

Dabei ist a_0 ein fester Wert unabhängig der Kreisfrequenz w_0. Die beiden Fourierkoeffizienten a_n und b_n (Index n) sind die eigentlich interessanten Bestandteile, welche anhand fest gegebener Algorithmen berechnet werden können.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \sin(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

Große Bedeutung der harmonischen Schwingungen für die gesamte Physik

Harmonische Schwingungen sind die **Bausteine**, aus denen sich durch Überlagerung alle periodischen Vorgänge - mögen sie auch noch so kompliziert sein - in eindeutiger Weise zusammensetzen lassen.

Bem*

Um die Phase zu berücksichtigen, nimmt man Cosinus und Sinus
(läßt sich gut mit der Zeigerdarstellung und orthogonale Komponenten (sin & cos) zeigen:
$\varphi = 0 \Rightarrow \sin(n\omega_0 t)$ / $\varphi = \pi \Rightarrow -\sin(n\omega_0 t)$ / $\varphi = \pi / 2 \Rightarrow \cos(n\omega_0 t)$ / $\varphi = 3\pi / 2 \Rightarrow -\cos(n\omega_0 t)$

Synthese einer Rechteckschwingung (GTR)

auf dem Overheadprojektor vormachen:

- **punktsymmetrisch** zum Ursprung ⇒ **Sinusfunktion**
  (bzw. **ungerade Fkt** f(-t) = –f(t)) (Cosinus bei Achsensymetrie)

- **Wellenlänge** λ bzw. Frequenz f = c/λ der Grundfrequenz ist durch
  Wellenlänge λ bzw. Periode T = 1/f = λ/c der Rechteckschwingung vorgegeben

- **Achsensymmetrisch**
  zum Bauch bei (λ / 4) zwischen den Knoten
  ⇒ **nur ungeradzahlige Vielfache** (Buckel abziehen / Täler auffüllen)

Exakte Lösung (Rechteckschwingung)

$$A_R(x) = \frac{4a}{p}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \frac{1}{9}\sin(9x) + ... \right)$$

Merke: Alle ungeradzahligen Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke

GTR-Aufgabe: Was passiert, wenn man analog hierzu, nicht nur die ungeradzahligen, sondern auch die geradzahligen, d.h. alle Harmonischen nimmt ??

Lösung (Sägezahnfunktion mit negativer Steigung)

$$A_R(x) = \frac{2a}{p}\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + ... \right)$$

Merke: Alle Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke

Lösung (Sägezahnfunktion mit positiver Steigung)

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} a(t)\cos(n w_0 t)\, dt$$

Merke: Alle Harmonischen mit reziproker Amplitudenstärke

Lösung (Dreiecksfunktion)

$$A_R(x) = \frac{4a}{p}\left(\sin(x) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin(3x) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \sin(5x) - \left(\frac{1}{7}\right)^2 \sin(7x) + ... \right)$$

Merke: Alle ungeradzahligen Harmonischen mit quadratisch-reziproken Amplitudenstärke und wechselndem Vorzeichen bzw- wechselnder Phase.

Diese mathematische Zerlegung funktioniert im Orts- oder Zeitraum

Zeitfunktion (an einem Ort)	$\sin(w\, t) = \sin(\frac{2p}{T} t) = \sin(2p\ f\ t)$
Ortsfunktion (zu einem Zeitpunkt)	$\sin(k\, x) = \sin(\frac{2p}{l} x)$

AbschlußVersuch
Akustische Analyse einer Sägezahnschwingung (200 Hz) des Frequenzgenerators
durch Überlagerung mit Sinusschwingung
⇒ Schwebungserscheinungen bei allen Obertönen (400Hz, 600Hz, 800Hz, 1000Hz)

2 Klangspektren musikalischer Instrumente

Musikalische Bezeichnungen physikalischer Schwingungen

Ton = **reine Sinusschwingung** mit fester Frequenz und Amplitude

- Die **Frequenz** bestimmt die **Tonhöhe**
- Die **Amplitude** bestimmt die **Tonstärke**

Klang = **periodische, aber nicht sinusförmige Schwingung**

- Der Klang entsteht durch Superposition von Sinusschwingungen, deren Frequenzen **ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz** sind.
- Die Partialtöne sind harmonische Obertöne des Grundtones.
- **Tonhöhe** ist bestimmt durch **Frequenz der Grundschwingung**
- **Klangfarbe** wird durch Frequenz, Amplitude und Anzahl der **Oberschwingungen** bestimmt.
- Zusätzlich entscheidend sind **Einschwing- und Abklingverhalten**

Tongemisch = Überlagerung sinusförmiger Schwingungen beliebiger Frequenzen (Glocken)

Geräusch = nichtperiodische Schalldruckschwankungen

- Gemisch unterschiedlicher Frequenzen

2.1 Saiteninstrumente

Mögliche Versuche:

Aufnahme der Schwingung durch Pick up Spule bzw. Tonabnehmer

- Einflußparameter für Frequenz
  - Saitenspannung
  - Saitenmaterials
  - Saitenlänge
- Schwingungsform bei Anregung durch
  - Zupfen (Mitte, Rand, zeitlicher Verlauf)
  - Streichen (Geigenbogen)
  - Schlagen (analog Klavier)

Wechselstrom durch Metallsaite in Magnetspalt

- Resonanzbereich mit einem Wechselstromgenerator durchfahren
- Zwei Wechselstromgeneratoren mit Harmonischen
- Amplitude der Harmonischen Wechselströme verändern
- mit Stroboskop Snapshots der Schwingung anschauen

Reibungsoszillator / Sägezahnanregung gestrichener Saiten

- Reibungsoszillator als Modell für Energiezufuhr durch Geigenbogen
- Holzklotz auf Reibungsbandmaschine eingespannt zwischen waagrechten Federn
- Selbsterregte Schwingung (Sägezahn: Geige!!!) durch Haftreibung - Federkraft - Gleitreibung - usw.
- phasenrichtige Zufuhr von Energie
- Reiches Obertonspektrum der Geige

2.1.1 Eigenfrequenzen / Gesetz von Mersenne

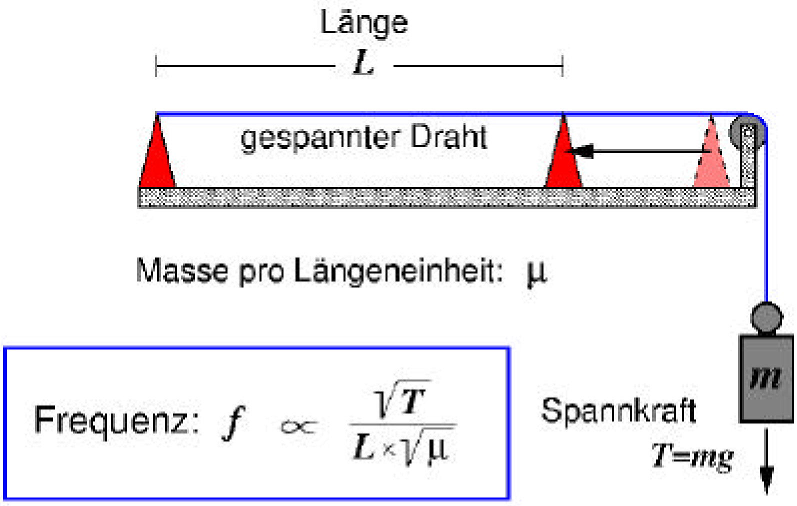
- **Marin Mersenne**, Harmonie universelle, **1636**
- **Galilei, Galileo**: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend",.**1638**

Die Frequenz der schwingenden Saite ist

- proportional zur Quadratwurzel der Saitenspannung T
- umgekehrt proportional zur Masse pro Längeneinheit μ = M / L
- umgekehrt proportional zur Saitenlänge L

Die ersten beiden Aussagen ergeben sich
- entweder durch Messung
- oder aus der Tatsache, daß es sich hier um ein lineares Kraftgesetz (d.h. rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung) handelt

  ⇒ analog zum Federpendel gilt: $f \propto \sqrt{\frac{D}{m}}$



Allgemeiner schreibt sich dieses Gesetz in der Form:

$$\boxed{f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{Ar}}}$$ mit

- der Saitenlänge L,
- der Saitenspannung T,
- der Querschnittsfläche A und
- der Dichte ρ = m / V = m / (L A) des Saitenmaterials

Anwendung dieser Parameter:
- Bassaiten werden mit Cu-Draht umwickelt ⇒ m/L wird größer
- Saitenspannung wird zum Stimmen geändert
- Saitenlänge bestimmt die Tonhöhe

Anregungsvorgang

- Zupfen (Gitarre, Harfe)
- Streichen (Violine, Viola, Kontrabass, Cello)
- Schlagen (Hammermechanik beim Klavier)

2.1.2 Geschlagene Saiten / Klavier

- Hammermechanik, Anschlagen einer Saiten / freies Ausschwingen
- filzbezogener Hammer schlägt / filzbezogener Dämpfer hebt sich ab
- Änderung des Klangspektrums beim Klavier / freies Ausschwingen

- Basssaiten sind mit Kupferdraht ein bis zweimal umwickelt ⇒ Masse pro Länge steigt
- Hochtonsaiten sind doppelt oder dreifach ausgelegt ⇒ um mit der Lautstärke mitzuhalten

- höherfrequente Obertöne sind anharmonisch (Klangfülle bzw. Wärme)
  d.h. die Frequenzen der realen Partialtöne steigen
  mit der Ordnungszahl schneller an als die der exakten Harmonischen
  - zum einen wegen temperierter Stimmung
  - zum anderen wegen Steifheit der Stahlsaiten

- Beim Drücken einer Taste wird der **Dämpfer von der Saite** gehoben und
- der **Hammer** versetzt die Saite in vertikale Schwingungen.
- Über den Steg werden die Schwingungen **auf den Resonanzboden** übertragen, dessen Fläche groß genug ist, um hörbare Luftschwingungen zu erzeugen.
- Ein typischer Konzertflügel hat etwa **243 Saiten** (wobei bis zu drei Saiten eine sogenannte Gleichklanggruppe bilden können), deren **Länge von 5cm bis 2m** reichen.
- Um der extrem hohen **Saitengesamtspannung von bis zu 3000N** zu widerstehen, erreicht das Gewicht des Stahlrahmens 120kg bis 180kg.
- Der **Resonanzboden ist eine bis zu 1cm dicke Fichtenplatte**.
- Nach der Orgel und elektronischen Geräten besitzt es das **breiteste Frequenzspektrum**.

Anschlag:

- Die **Härte des Hammers** ist neben der Saitenspannung ein Klangparameter.
- Ist der Hammer sehr leicht, wird er abgebremst und zurückgeworfen, bevor die Reflektionen ihn erreichen. **Die Saite schwingt in ihren Normalmoden.**
- Normalerweise ist der Hammer deutlich schwerer als die Saite. Der **reflektierte Anschlagspuls erreicht den Hammer, bevor dieser zurückgeworfen wird.** Daraus resultieren mehrere Kontakte und damit Interferenzen von Hammer und Saite.
- Im Allgemeinen klingen die harmonischen Amplituden einer geschlagenen Saite **nicht so schnell ab wie bei einer gezupften Saite.**

- Eine Filzbeschichtung erlaubt eine **Abstimmung der Härte des Hammers**.
- Hämmer können **härter** gemacht werden, indem mit Sandpapier etwas weicher Filz entfernt wird, oder mit Lack gehärtet wird.
- Hammer **weicht man auf**, indem man den Filz mit Nadeln einsticht.
- **Harte Hämmer erregen besser höhere Frequenzen als weiche**
- Der Klang harter Hämmer ist rau und blechern,
- der Klang weicher Hämmer eher dumpf ist.

2.1.3 Gezupfte Saiten (Gitarre): Dreiecksform

Versuch: Dreiecksform gezupfter Saiten:
Anregung durch **Zupfen des Gummibandes** an den Rändern
- Beleuchtung mit **Stroboskop**
- Simulation (Wellenmaschine und Folie)
  mit Snapshots der Einzelbewegungen

- Schwingung der Saite = Kombination aus Grundton und Obertönen

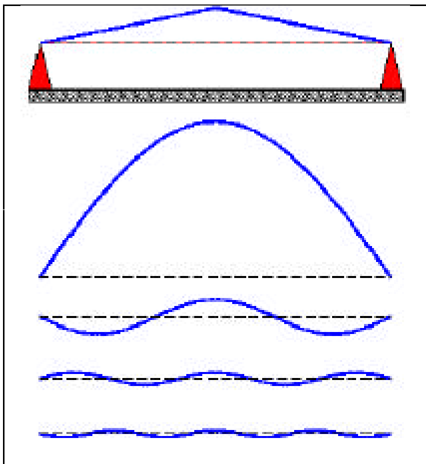
- **analog wie beim Rechtecksignal**
  - Knoten bei $x = 0$ und bei $x = L$

⇒ sin (x), da sin(0) = 0

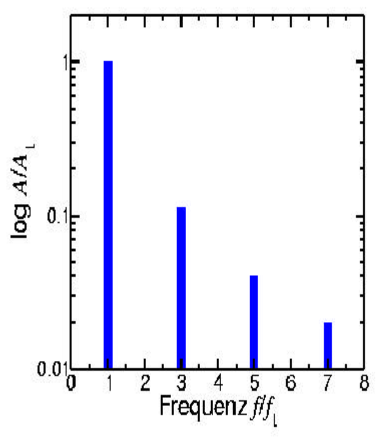
Sinusfunktion (sin (x=0) = 0)

- **nur ungeradzahlige Oberschwingungen,**
  damit achsensymmetrisch zur Mitte (λ / 4)
  zwischen den festgespannten Enden (λ / 2) als Knoten

- **im Gegensatz zum Rechteck**
- Maximale Auslenkung in der Mitte (λ/4)
  ⇒ gegenphasige Komponenten



n	A_n/A_1	φ
1	1	+
2	0	
3	1 / 9	-
4	0	
5	1 / 25	+
6	0	
7	1 / 49	-



2.1.4 Gestrichene Saiten (Geige) / Sägezahnschwingung

Die gestrichene Saite gehorcht
zwei einfachen physikalischen Gesetzmäßigkeiten:

- Gleitreibung ist kleiner als Haftreibung.
- Eine gespannte Saite kann nur in ihren Eigenschwingungen schwingen

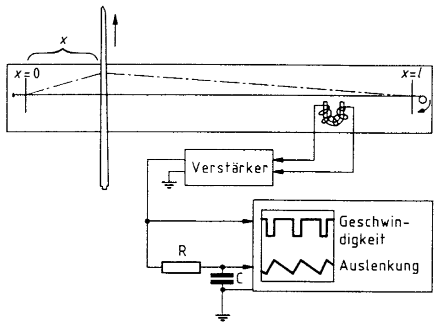


Abb. 4: Experiment zur Beobachtung der Saitenbewegung beim Streichen mit dem Bogen.

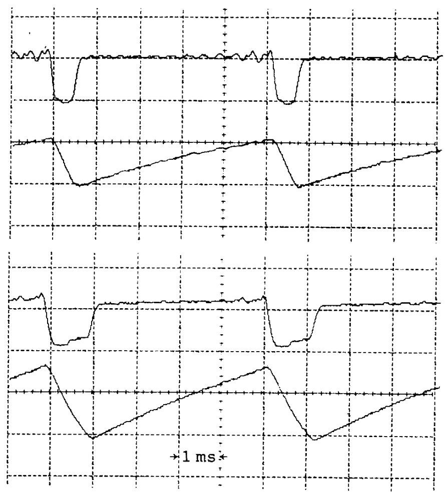


Abb. 5: Oszillogramme der Saitengeschwindigkeit und der Saitenauslenkung, aufgenommen bei x = L/10 und L/5.

Stick and Slip

- **Haftreibungsphase:**
  Streicht man den Bogen mit ausreichender Geschwindigkeit und Kraft über die Saite, so wird diese zunächst aufgrund von Haftreibung vom Bogen ausgelenkt.

- **Gleitreibungsphase:**
  Wird die rücktreibende Kraft (Saitenspannung) so groß, dass sie die maximale Haftreibung überwindet, dann beginnt die Saite entgegen der Bogenbewegung zu gleiten.

- Ist die Saite deutlich auf der anderen Seite angekommen, so bleibt sie **erneut am Bogen haften**, wird wieder mitbewegt, bis sie schließlich **erneut vom Bogen losgelöst** wird. Wenn man diesen Ablauf periodisch wiederholen kann, erhält man die gewünschte Saitenschwingung.

Versuch: Sägezahnform gestrichener Saiten
Pick-up (Tonabnehmer) Spule an Monochord Saite

- Induktionsspannung aufs Oszi (prop to Schnelle der Saite)
- Durch Integration mit der Zeitkonstanten τ = RC erhält man die Saitenposition
- Ergebnisse des Oszilloskopbildes (siehe Abbildung):
  - geringe Saitengeschwindigkeit = Bogengeschwindigkeit (längere Haftreibungsphase)
  - Rückstellkraft > Haftreibungskraft
  - hohe Saitengeschwindigkeit = Gleitreibungsphase
  - Oszillogramme kehren sich um, wenn man die Streichrichtung ändert
  - Oszillogramme werden höher, wenn man die Streichgeschwindigkeit steigert.
  - Das Geschwindigkeitsverhältnis (Haft- / Gleit) entspricht dem Längenverhältnis x/(L-x) der geteilten Saite am Abtastort
    In der Saitenmitte ist das Signal zeitsymmetrisch
  - Eine Änderung des Anstreichortes ändert das Zeitverhältnis nicht

Die Zeitabschnitte zwischen den Umkehrpunkten innerhalb einer Periode
verhalten sich genauso wie die Teillängen der Saiten links und rechts vom Beobachtungspunkt

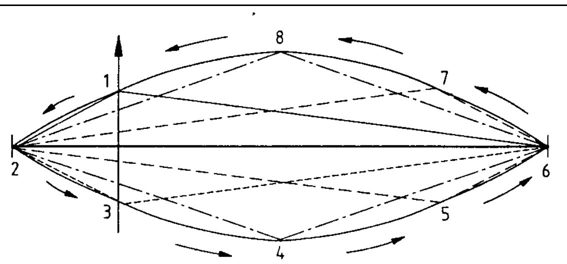
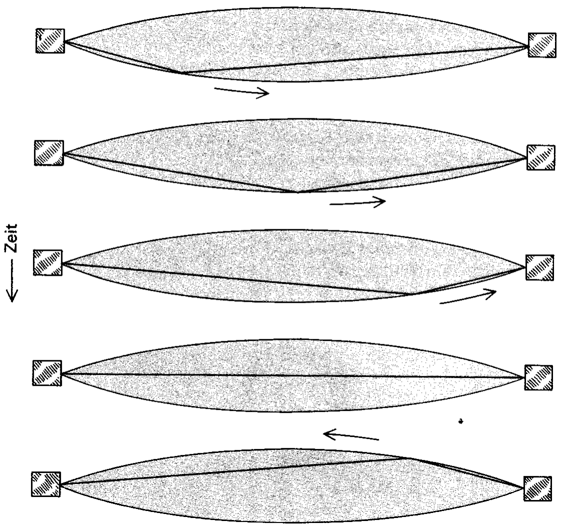


Abb. 6: Bewegung des Saitenknicks entlang zweier Parabelstücke während einer Periode. (Die Auslenkung ist sehr stark übertrieben dargestellt.)

- Die Saite bildet zu jedem Zeitpunkt ein **Dreieck über den Saitenendpunkten**. Die dritte Ecke läuft, je nach Streichrichtung, in der einen oder anderen Richtung auf einer **aus zwei Parabelbögen bestehenden Bahn** um (Helmholtz! siehe Kummer!).

- Die Umlaufzeit T = L/c = L/sqrt(K/µ) ist die **Periode der freien Grundschwingung.**

Von einer schwingenden Saite gehen periodisch Kugelschalen komprimierter Luft aus. Folgen die Schwingungen und die Druckwellen rasch genug, so hören wir sie als Ton.



- **Versuch: phasenrichtige Energiezufuhr** beim Anregungsmechanismus gestrichener Saiten
  - Holzklotzresonator (auf Reibungsband)
  - Zwei Geigenbogen (aktiv/passiv) auf beiden Saitenhälften

Phasenrichtige Energiezufuhr durch Rückkopplungsmechanismus:

- Ein genauer **Zeitgeber**, der das Haften und Abgleiten der Saite am Bogen auslöst, ist die **periodisch wiederkehrende Knickstelle**, die Helmhoitz beobachtet hat.
- Der mit der Periode der freien Saitenschwingung umlaufende Saitenknick synchronisiert die Energiezufuhr im Wechselspiel zwischen Haft- und Gleitreibung.

- Das plötzliche Loslösen der Saite, wenn das Gleiten beginnt, liefert einen Knick (s.o.), der während jeder vollen Schwingung einen Rundlauf entlang der Saite läuft. Dieser Knick wird am Steg reflektiert und wenn er wieder am Bogen (Ausgangspunkt) ankommt, dann gibt er diesem Teil der Saite einen heftigen Ruck, der garantiert, dass sie wieder am Bogen haftet.

- Nachdem der Knick am Sattel reflektiert wurde, gibt er der Saite (am Ausgangspunkt) dann einen Ruck in die entgegengesetzte Richtung. Dies führt dazu, dass die Saite rechtzeitig vom Bogen gelöst wird, um einen neuen Durchlauf zu starten.

- Dieser **"stick and slip" Mechanismus** verursacht die sägezahnförmige Auslenkung

Dieser **(Stick and Slip) Rückkopplungsmechanismus** funktioniert auch bei
- Singenden Weingläsern
- Quitschender Kreide
- Quitschende Autobremsen

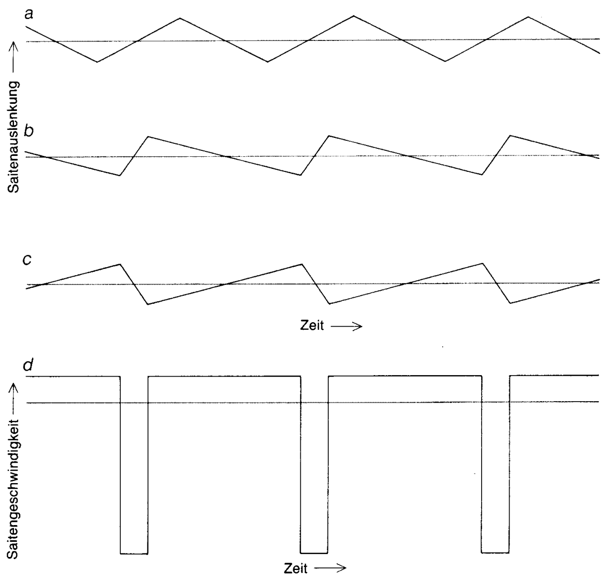


Bild 2: Die drei Sägezahnkurven zeigen die Auslenkung einer gestrichenen Saite, aufgetragen über der Zeit. Der Bogen wurde nah an einem Saitenende geführt. Der Beobachtungspunkt lag für Kurve *a* in der Mitte der Saite, für Kurve *b* nahe dem Steg und für Kurve *c* nahe am Sattel. Die Schwingung verläuft in zwei Zeitabschnitten, deren Verhältnis so groß ist wie jenes der Teillängen der Saite links und rechts von Beobachtungspunkt. Die rechteckige Kurve *d* für die Saitengeschwindigkeit entspricht der Kurve *c* für die Auslenkung.

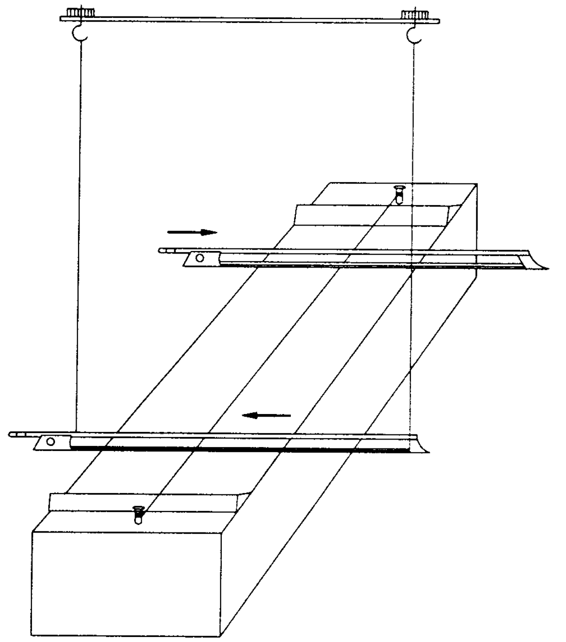
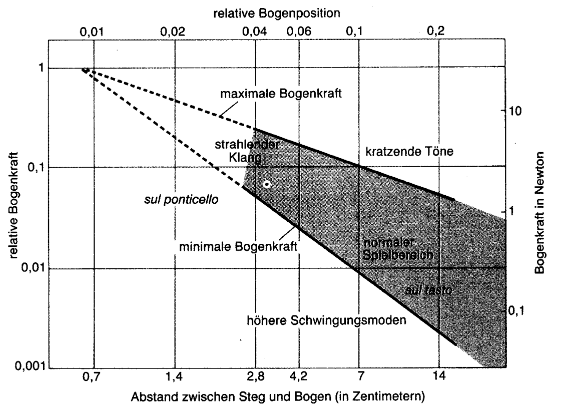


Abb. 7: Experiment zur Synchronisation der Saitenschwingung beim Streichen: der frei hängende Bogen bewegt sich gegenläufig.

- Der geschilderte Rückkopplungsmechanismus funktioniert nur, wenn die **Geschwindigkeit** des Bogens und die Kraft, mit der er auf die Saite gedrückt wird (die Geiger sagen dazu: **Bogendruck**) zueinander passen.

- Je näher am Steg gestrichen wird, desto geringer ist der Abstand zwischen Maximal- und Minimaldruck: Nahe am Steg und schnell - das sind gerade die Bedingungen für einen **intensiven, brillanten Ton.**



Das **Spektrum der Sägezahnschwingung** ist einfach:
Die Amplitude jeder n-ten Harmonischen ist genau
der n-te Teil der Anfangsamplitude der Grundschwingung.

Bemerkung:
- Wie schon beim Klavier (wo sich der Hammer zumeist bei L/7 befindet), sollte auch die Geigensaite bei L/7 angestrichen werden
  (Die 7. Harmonische ist das erste dissonante Tonintervall)
- Je nach Auflage- bzw. Streichpunkt werden entsprechende **Obertöne verstärkt bzw. gedämpft**.

2.1.4.1 Aufbau der Geige

- **Akustischer Kurzschluß**: Die komprimierte Luft vor der Saite strömt leicht in die Verdünnungs-zone hinter der Saite. Die schwingende Saite strahlt selbst sehr ineffektiv Schall ab.

Resonanzkörper ist notwendig!!!

- Vier über einen Resonanzkörper gespannte Saiten verschiedenen Durchmessers.
- Unter dem baßseitigen Stegfuß ist die Decke durch den sogen. Baßbalken versteift.
- Unter dem diskantseitigen Fuß stützt der Stimmstock die Decke gegen den Boden ab.

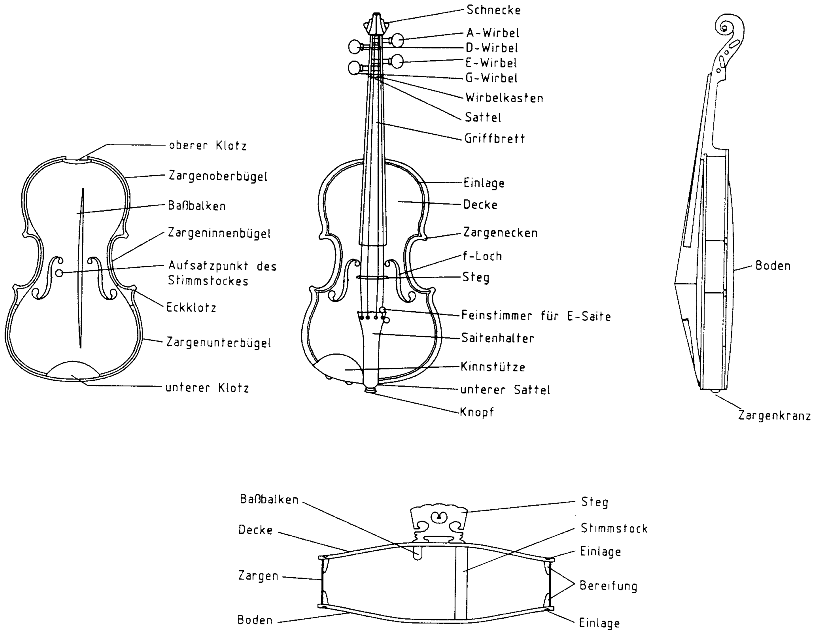


Abb. 3: Die Geige mit einer Ansicht der Deckenunterseite mit Baßbalken und einem Querschnitt in der Nähe des Stegs.

- **Der Steg hat die Funktion, die Saitenschwingungen auf die Geigenkorpus zu übertragen.**
- Da der diskantseitige Stegfuß ganz in der Nähe des Stimmstocks, also relativ fest aufsteht, wirkt der **Steg wie ein dreiarmiger Hebel**, der die horizontale Bewegung der Stegoberkante zu einer vertikalen vorwiegend des baßseitigen Fußes macht.
- Dieser "stampfende" Fuß setzt einen großen Teil der Baßseite der Decke in Bewegung, denn unter ihm verläuft ja gerade der **Baßbalken**.

2.1.4.2 Resonanzfrequenzen des Geigenkorpus

Versuch: Helmholtzresonanz ▪ Tieftonlautsprecher über einem der beiden f-Löcher Mikrofon über das andere f-Loch ▪ Starke Resonanz bei f = 275 Hz (bei allen Geigen)	▪ Helmholtz bei f=275 Hz ▪ Ringresonanzen (f = 315 Hz bzw. f = 340 Hz) ▪ Schwingungsmode bei ca. 466 Hz

Helmholtz-Resonanz ist Gegeneinanderpumpen von Decke und Boden,
bekannt vom Bierflaschen-Blasen:

- Das Luftpolster im Flaschenbauch entspricht einer **Feder**, die **um so härter ist, je kleiner das Volumen V ist. (D $\propto$ 1/V)**
- Der Luftpfropfen im Flaschenhals entspricht der **Masse des Masse-Federpendels**, welche
  - mit der Länge l des Flaschenhalses wächst und
  - mit dem Halsquerschnitt A sinkt **(m $\propto$ l/A)**:

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}}$$

2.2 Blasinstrumente

- Wesentlich bessere Schallabstrahlung als Saiteninstrumente,
  da das schwingende System aus dem gleichen Material besteht wie das schallausbreitende.

2.2.1 Schwingende Luftsäulen

Quinckesches Rohr

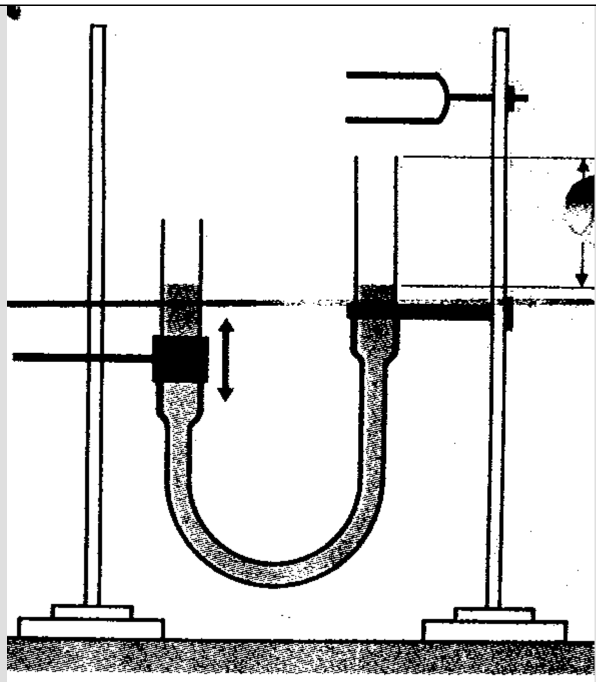
- Abstimmen der Luftsäule
  durch Variation des Wasserstandes

- Die von außen aufgezwungene Luftschwingung findet **Resonanzbedingungen** vor
  d.h. erfüllt die Randbedingungen
  für Eigenschwingungen der Luftsäule

- Luftsäule wird gemessen
- $\lambda/4$ und dann im Abstand von $\lambda/2$
  (ungeradzahliges Vielfaches von λ / 4)
- Wer kann das erklären ??

Genauere Behandlung durch Sichtbarmachen der Luftschwingung ⇒ **Kundtsche Röhre**

Bei der Gelegenheit (Resonanz !!!!!) erklären
- am besten Schüler erklären lassen, warum es beim Durchfahren Stellen gibt, an denen die Lautstärke zunimmt.



Kundtsches Rohr
August Kundt, deutscher Physiker, 1815-1894

Auf beiden Seiten eines Schnelleknotens schwingen die Luftteilchen von links und rechts
- entweder gegen den Knoten an ⇒ Druckmaximum
- oder vom Knoten weg ⇒ Druckminimum

d.h. ein Bewegungknoten ist ein Druckbauch (Modell mit Kopf zwischen den Händen)

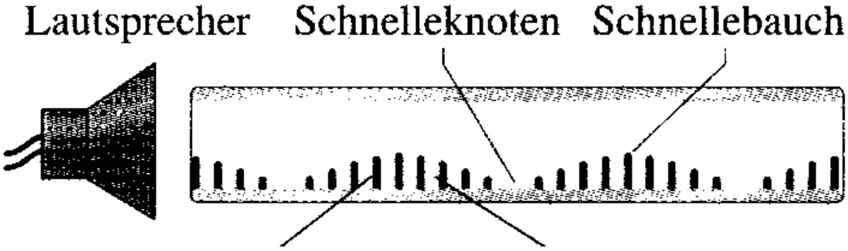
- **Bewegungsknoten = Druckbauch (z.B. geschlossenes Ende)**
- **Bewegungsbauch = Druckknoten (z.B. offenes Ende)**
- Druck und Schnelle schwingen phasenverschoben um $\Delta\phi = \pi / 2$
- **Abstand zwischen zwei Bewegungsknoten bzw. Bewegungsbäuchen = l / 2**
- Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft über
  $c = f$ (Frequenzgenerator) λ (doppelter Abstand)

- **Verschieben des Kolbens**
- Verändern der Frequenz und Bestimmung der Wellenlänge
- Auftragen der Wellenlänge gegen die reziproke Frequenz (Steigung ist c)

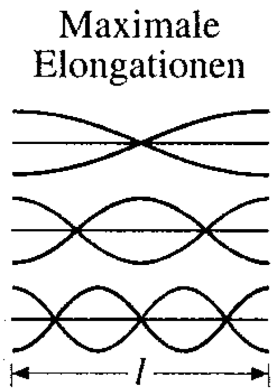
Die Linien, die der Korkstaub bildet, entstehen durch Luftströmungen im Rohr. Sie haben mit der Wellenlänge nichts zu tun. Weitere Infos: Bergmann / Schäfer.

Schülerexperiment mit CoolEdit
- Reagenzgläser Frequenz aufnehmen und
- mit der Formel verknüpfen

2.2.2 Beidseitig offenes Rohr / Heulrohr

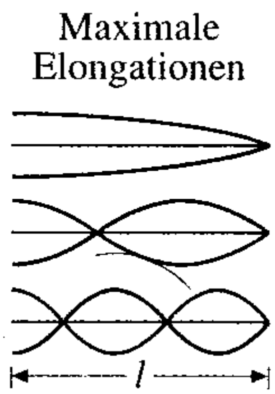


- Randbedingungen: An den Enden Schnellebäuche bzw. Druckknoten
- Abstand zweier Bäuche = Abstand zweier Knoten = λ / 2 (analog wie bei der Saite!!)

	Länge der Luftsäule	Wellenlänge	Frequenz
	L = 1 (λ1 / 2)	λ1 = 2L	f1 = c / λ1 = 1 (c / 2L) = 1 f1
	L = 2 (λ2 / 2)	λ2 = 2L / 2	f2 = c / λ2 = 2 (c / 2L) = 2 f1
	L = 3 (λ3 / 2)	λ3 = 2L / 3	f2 = c / λ3 = 3 (c / 2L) = 3 f1
	L = k (λk / 2)	λk = 2L / k	fk = c / λk = k (c / 2L) = k f1
	$L = k\frac{l_n}{2}$ *bzw.* $f_k = k\frac{c}{2L}$ *für* $k = 1,2,3,...$		

2.2.3 Einseitig geschlossenes Rohr / Quincksches Rohr

- Unterschiedliche Randbedingungen
- Abstand (Knoten - Bauch = λ / 4) + Abstand (Bauch-Bauch = λ / 2)

	Länge der Luftsäule	Wellenlänge	Frequenz
	L = 1 (λ1 / 4)	λ1 = 4L	f1 = c / λ1 = 1 (c / 4L) = 1 f1
	L = 3 (λ2 / 4)	λ2 = 4L / 3	f2 = c / λ2 = 3 (c / 4L) = 3 f1
	L = 5 (λ3 / 4)	λ3 = 4L / 5	f2 = c / λ3 = 5 (c / 4L) = 5 f1
	L = (2k-1) (λk / 4)	λk = 4L / (2k-1)	fk = c / λk = (2k-1) (c / 4L) = (2k-1) f1
	$L = (2k-1)\frac{l_k}{4}$ *bzw.* $f_k = (2k-1)\frac{c}{4L}$ *für* $k = 1,2,3,..$		

Merkregeln:

- Abstand zwischen zwei Bewegungsknoten bzw. Bewegungsbäuchen = λ / 2

- gleiche Randbedingungen $\Rightarrow$ geradzahlige Vielfache der Grundfrequenz
- gemischte Randbedingungen $\Rightarrow$ ungeradzahlige Vielfache der Grundfrequenz
- Dies spiegelt sich im Klangcharakter wider.

- Druck- und Schnellezustände schwingen gegenphasig (Dort wo sich was bewegt, entsteht kein Druck. Dort wo es sich hinbewegt, entsteht Überdruck, dort wo es sich wegbewegt, Unterdruck)

- ***gedackte*** **Pfeifen** (gemischte Randbedingung) klingen
  - eine Oktave ***tiefer*** als offene Pfeifen gleicher Länge und
  - haben nur <u>***ungeradzahlige***</u> <u>Harmonische</u>

offenes Ende	**Schwingungsbauch**	**Druckknoten**
festes Ende	**Schwingungsknoten**	**Druckbauch**

Reflexion am offenen Ende

- Verdichtungspfropf zerplatzt am offenen Ende
- Unterdruck (durch Zerplatzen) überlagert sich mit anlaufendem Überdruck
- Normaler Luftdruck (Druckknoten), aber Schnellebauch (hohe Teilchenbewegung)
- Randbedingung für offenes Ende ($p = p_0 = const$)

Eigenfrequenzen best. durch Randbedingungen

- **geschlossenes Ende**
  - Luftteilchen können sich nicht bewegen = Bewegungsknoten
  - Teilchen werden hier dagegengepresst und können nicht weg = Druckbauch

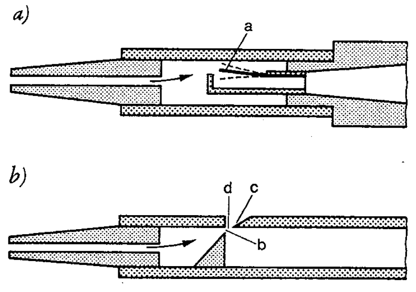
- **offenes Ende**
  - Luftteilchen bewegen sich rein und raus = Bewegungsbauch
  - Druckverhältnisse an die Umgebung angepasst = Druckknoten

Corruga Heulrohr

- Schwingen lassen (Mikrofon in festgehaltenem Ende???)
- Entstehende Töne sind Naturtonreihe C C G C D G E

2.2.4 Holzblasinstrumente

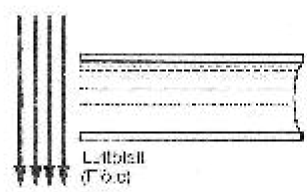
2.2.4.1 Anregungsvorgang / Zungen und Lippenpfeifen

<table>
<tr><td colspan="2">Ein Ende, die Lufteintrittsöffnung ist immer offen.</td><td rowspan="2">
a) offene Zungenpfeife
b) offene Lippenpfeife
a Zunge, c Schneide,
b Spalt, d Maulweite.</td></tr>
<tr><td>anderes Ende offen
Lippenpfeife
Schnellebauch

▪ beide Enden offen
▪ alle Obertöne
▪ klarer Klang
  ▪ Blockflöte,
  ▪ Querflöte,
  ▪ Orgel</td><td>anderes Ende geschlossen
Zungenpfeife
Druckbauch

▪ gemischte Randbedinungen
▪ nur ungeradzahlige Obertöne
▪ schnarrender Klang
  ▪ Schnarrwerk (Orgel)
  ▪ Klarinette, Saxophon
  ▪ Oboe, Fagott, Stimme</td></tr>
</table>

Lippenpfeifen / Labialpfeifen



Anregung am Luftblatt (Querflöte, Heulrohr)

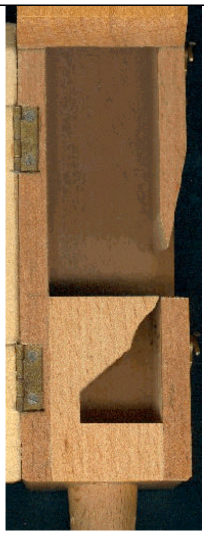
- Änderung der Luftgeschwindigkeit an der Anblasöffnung regt Luftsäule zu Eigenschwingungen an

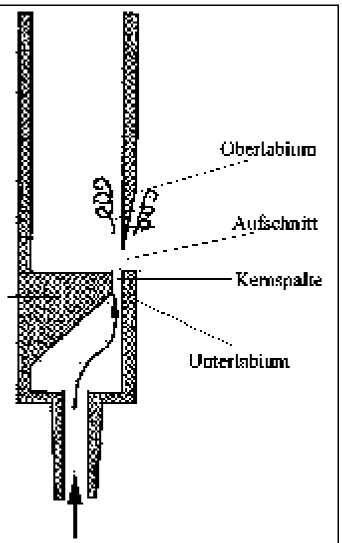
Anregung durch Wirbelablösung an
Schneide bzw. Lippe

Luftstrom trifft auf Schneide und erzeugt Wirbel, die im Moment ihrer Ablösung die Luftsäule im Innern der Säule anstößt.

Der Luftstrom, der durch die **Kernspalte** gebildet wird, strömt als dünne Lamelle durch den Aufschnitt und wird dort durch die Schallschwingungen in der Luftsäule **periodisch abgelenkt**, so daß sie abwechselnd nach innen und außen ausschwingt.

Sobald die Pfeife anspricht, bildet sich eine **stabile stehende Welle in der Luftsäule** aus, welche nun den Rhythmus der Wirbelablösung an der Lippe vorgibt.





- Der Luftstrom liefert dann immer die nötige Energie nach, um einen gleichbleibenden Ton aufrecht zu erhalten (**phasenrichtige Rückkopplung**).

Wirbelablösung in der Natur:
- an zylindrischen Masten oder Drähten
- Surren der Hochspannungsleitungen
- proportional zur Windgeschwindigkeit
- umgekehrt propto Drahtdurchmesser $f = 0.185\ v/d$

Visualisierung der Luftblattschwingungen http://members.aol.com/ReinerJank/emden.html
Um das Luftblatt sichtbar zu machen, wurde eine präparierte Pfeife mit CO_2 angeblasen. Die Versuchsanordnung ähnelte dem Prinzip eines Diaprojektors, wobei die Pfeife das „Dia" war. Als Lichtquelle diente ein gepulster Laser, der mit Lichtblitzen (Stroboskopprinzip) die Pfeife seitlich durchleuchtete. Die Optik projiziert den Bereich der Kernspalte auf eine weiße Wand.

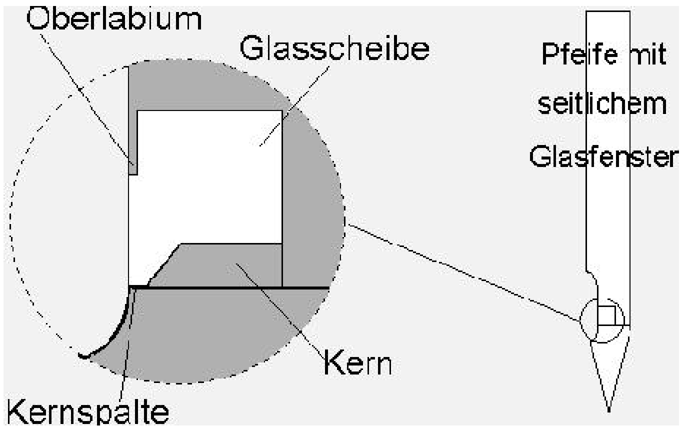


Abb. 4, schematische Darstellung zur Visualisierung

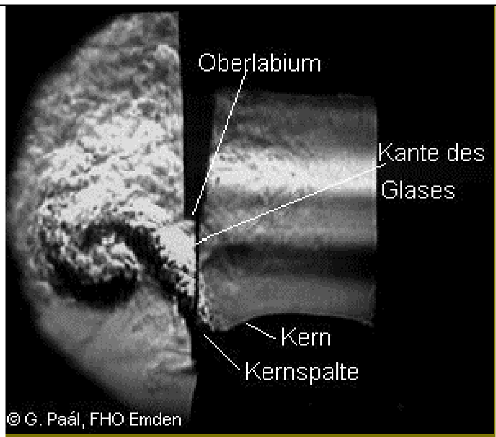
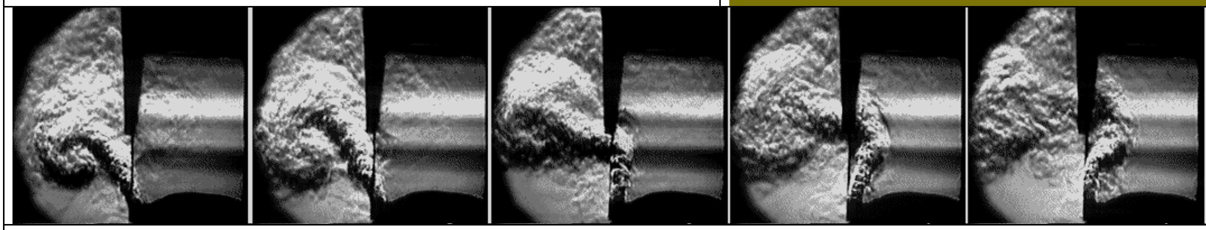
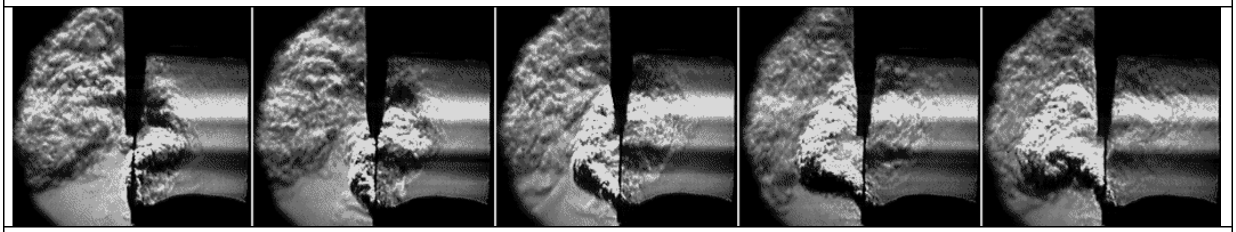


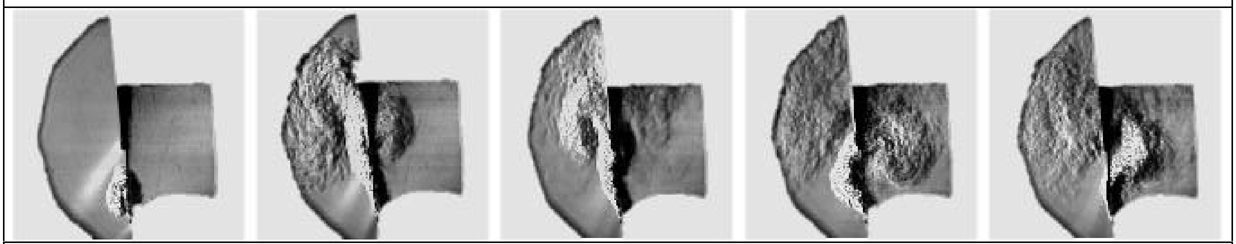
Abb. 5, Luftblattvisualisierung offene Pfeife



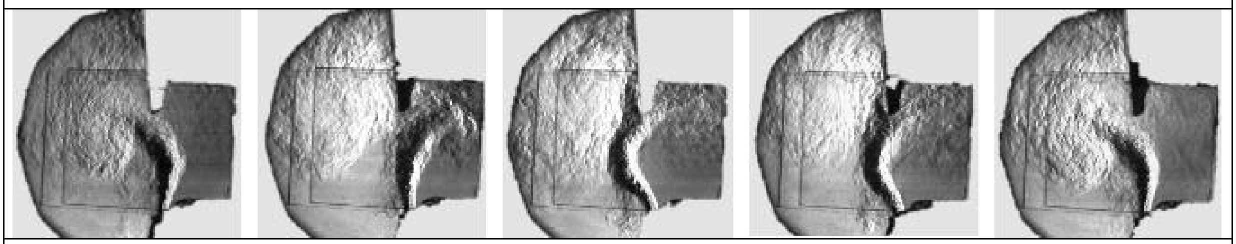
Luftblatt einer offenen Pfeife als Animationsfilm (92 kB)



Einschwingvorgang einer gedeckten Pfeife als Animation (113 kB)



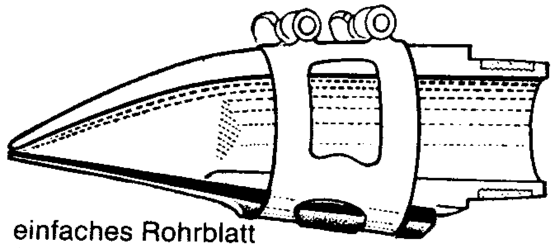
Luftblatt einer gedeckten Pfeife als Animationsfilm (112 KB)



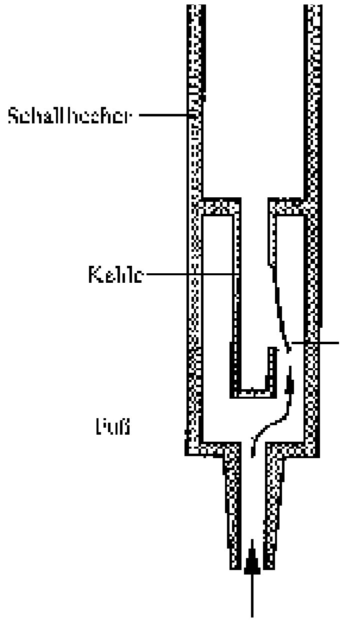
Geschwindigkeitsprofil einer gedeckten Pfeife als animierte Grafik (94 KB)

Zungenpfeifen

doppeltes Rohrblatt
(Oboe)



einfaches Rohrblatt
(Klarinette)



- Rohrblätter arbeiten wie **Ventile**,
  die den Luftstrom in das Instrument steuern.
- Sie öffnen und schließen sich
  abhängig vom Druck der schwingenden Luftsäule.

- periodisches **Öffnen** **(durch Druckmaximum**)
  und **Schliessen** **(durch Druckminimum**)
  ⇒ kontinuierlicher Luftstoß wird in **Luftstöße zerteilt**

- **Rechteckschwingung** dominiert,
- **ungeradzahlige** Vielfache (gemischte Randbedingungen)
- Schnarrender Klang

Gekoppeltes Resonatorsystem (Zunge und Schallbecher)

- Tonhöhe von Zungenpfeifen wird von der
  1. Eigenschwingung der schwingenden **Metallzunge** bestimmt.
- Schwingungsfrequenz wird von der **Luftsäule** mitbestimmt (Resonator)

- Das Frequenzspektrum und damit der Klangcharakter kann durch die **Verstimmung der Resonanzfrequenzen zwischen den beiden Resonatoren** beeinflußt werden.
- Zungenpfeife darf nur an der Zunge nachgestimmt werden (Zungenlänge)

Reduzierung der wirksamen Schallrohrlänge durch seitliche Grifflöcher

- Ist das Loch genauso groß wie die Innenbohrung, dann erhält man dieselbe Tonhöhe wie bei einem Rohr, das bis zu diesem Loch reicht.
- **Je kleiner die Löcher,**
  desto geringer der Unterschied zwischen tatsächlicher und wirksamer Rohrlänge.
- Wenn alle Tonlöcher geschlossen sind, klingt der tiefste Ton, weil die Rohrlänge maximal ist.
- Werden nun die Grifflöcher, die vom Mundstück am weitesten entfernt sind,
  langsam nacheinander geöffnet, so wird der Ton immer höher.
- Hinzu kommen noch **Überblastechniken, die jeden Ton in ihre nächsthöhere Eigenfrequenz** versetzen. Dies ist bei einer Flöte oder einer Oboe eine Oktave und bei der Klarinette gar eine Duodezime (Oktave+Quinte).

2.2.5 Blechblasinstrumente

Aufbau

- Kesselförmiges Mundstück
- konisches Mundstück
- Hauptrohr
  - zylindrisch (Trompeten, Posaunen)
  - konisch (Flügelhorn, Tenorhorn, Tuba)
- **Schallbecher bzw. Horn ist entscheidend für Tonhöhe und Klangfarbe**

Anregung

- **Lippen des Bläsers = Blatt einer Zungenpfeife**
- d.h. geschlossenes Ende
- trotzdem alle Oberschwingungen, da höherfrequenten Wellen weiter in den Schallbecher reichen ⇒ Frequenzen rücken zusammen.
- Druckschwankungen im Mundstück und gleichmäßiger Luftdruck aus der Lunge wirkt auf die Lippen
- Der Bereich vor (Mundstück) und hinter den Lippen (Mund und Rachenraum) beeinflussen sich gegenseitig
- Die periodischen Druckschwankungen, die im Mundstück auftreten, erregen eine Druckwelle, die zuletzt den ausladenden Schallbecher erreicht. Während dieses Vorganges verliert die Welle durch Reibung und Wärmeableitung Energie.
- An der Erweiterung des Schallbechers wird ein Großteil der Schallwelle reflektiert und läuft zum Mundstück zurück. Der Rest der Welle wird in die Umgebung abgestrahlt.
- Die reflektierte und wieder neu angeregte Schallwellen bilden zusammen stehende Wellen.

Klangfarbe / Obertöne

- ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz = Naturtonreihe C g c e g b c d e

Ventile verlängern das Hauptrohr entsprechend
Man benötigt nur 3 Ventile, um alle chromatischen Töne zu erzeugen !!!!!!!!

1. Ventil	große Sekund	9 / 8	1,125
2. Ventil	kleine Sekund	10 / 9	1,111
3. Ventil	kleine Terz	6 / 5	1,2
1.+ 2. Ventil	große Terz = große Sekund + kleine Sekund	(9 / 8)(10 / 9) = 5 / 4	1,25
1.+ 3. Ventil	große Sekund + kleine Terz	(9 / 8)(6 / 5) = 27/20	1,35
2.+ 3. Ventil	Quart = kleine Sekund + kleine Terz	(10/ 9)(6 / 5) = 4 / 3	1,33
1.+ 2.+ 3. Ventil	große Sekund + kleine Sekund + kleine Terz=	(9 / 8)(10 / 9)(6 / 5) =	
kein Ventil	Quint	3 / 2	1,5

2.3 Menschliche Stimme / Formanttheorie

- Anschluß mit Analogie zur einseitig geschlossenen Luftsäule (Oboe, Klarinette) und dem gekoppelten Systeme (Rohrblatt - Luftröhre)

Technisch-wirtschaftliche Relevanz = Computerinterface zum Menschen
- Sprachanalyse (Diktiergeräte, Sicherheitssysteme, Autoanweisungen etc.)
- Sprachsynthese ("individuell" synthetisierte Sprachansagen (Telefon etc.))
- Automatische Fremdsprachenübersetzung

Schematisches Modell der Tonerzeugung
- Energiequelle (Luftstrom, Geigenbogen, Zupfen, Hammer etc.)
- Oszillierendes bzw. Vibrierendes System (Schwingungserzeugung)
- Resonator (Luftsäule, Geigenkörper, etc.)

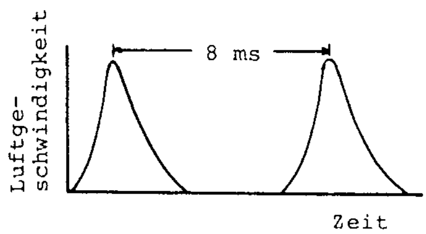
2.3.1 Lineares Modell der Stimmerzeugung

- **Lunge** als Luftreservoir
  - entspricht dem Blasebalg einer Orgel
  - keinerlei Einfluß auf die Tonqualität

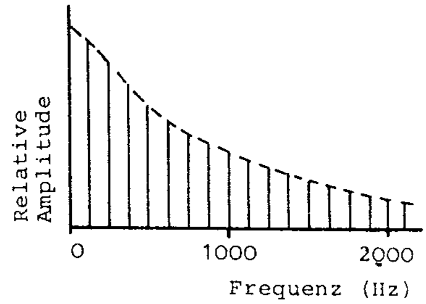
- **Kehlkopf**

  - **Stimmlippen** als Oszillatoren (Stimmhöhe und ungefiltertes Stimmspektrum)
    - fest verankert am vorderen **Schildknorpel** (Adamsapfel)
    - beweglicher **Stellknorpel** am hinteren Befestigungspunkt
  - Der in den Stimmlippen liegende Muskel hat die Fähigkeit zu aktiver Eigenspannung
  - geöffneter Entspannungszustand = Atmungszustand

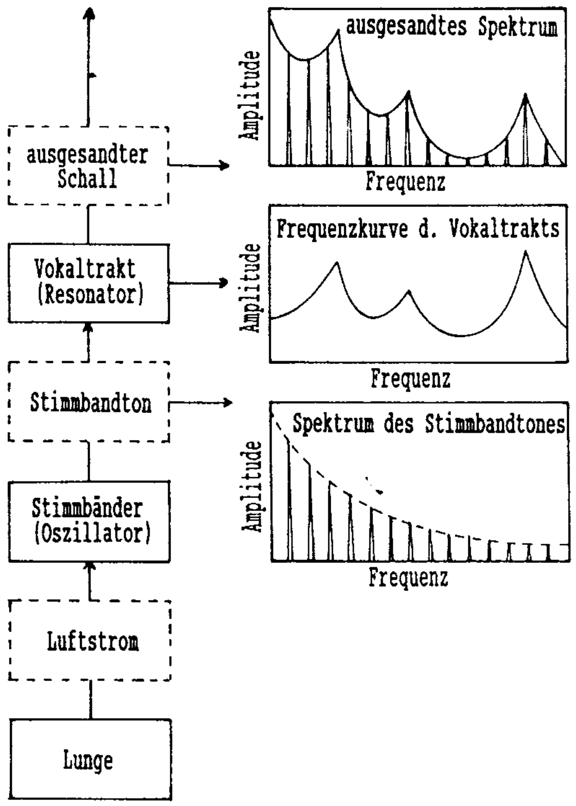
  - **Straffung und Lockerung der Stimmbänder**
    durch bewußte und unbewußte Muskelanspannungen (Lage der Knorpel)
    - ⇒ Engstelle für Luftstrom (bei gleichzeitig erhöhtem (1%) Luftdruck durch die Lunge)
    - ⇒ Aerodynamisches Paradoxon
      (Verringerung des statischen Luftdrucks durch Erhöhung der Stromgeschwindigkeit, eventuell mit zwei Blättern vormachen, p.s.: Abdecken von Häuserdächern)
    - ⇒ Zusammenziehen der Stimmbänder
    - ⇒ Abschluß des Luftstroms
    - ⇒ Stimmbänder auseinander
    - ⇒ Erneuter Zyklus

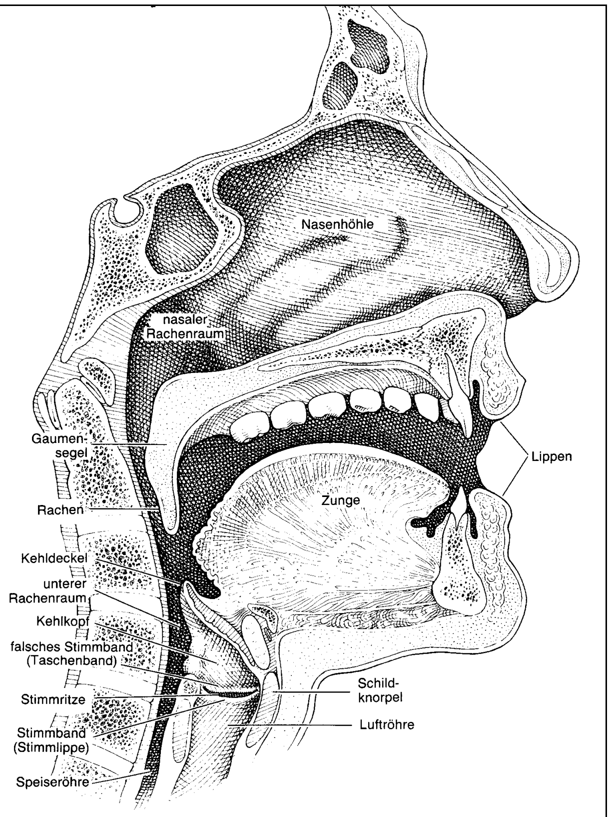


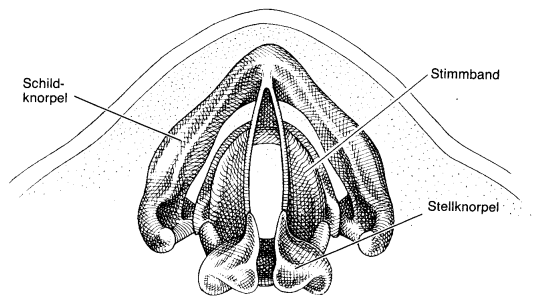
  - Die Eigenfrequenz dieses Schwingungszyklusses übernimmt die Funktion eines Rückkopplungs-mechanismusses und bestimmt die **Grundfrequenz des Stimmlautes**
  - Diese (1/T = 1/8ms = 125 Hz) ist abhängig von
    - Spannungszustand der Stimmbänder und
    - Geschwindigkeit des Luftstroms (Luftdruck)
  - Kein Muskel könnte aktiv für derartige Oszillationen sorgen



  - **Dreiecksform** dieses zyklischen Vorgangs
    ⇒ **obertonreiches Frequenzspektrum**
    mit Amplitudenabfall propto $1/n^2$
  - Stimmbandton ist stimmhafter,
    aber noch undifferenzierbarer Klang.
  - Ertasten der Stimmbandschwingungen
    mit stimmhaftem ("zzzz") und "stimmlosem ("ssss") S





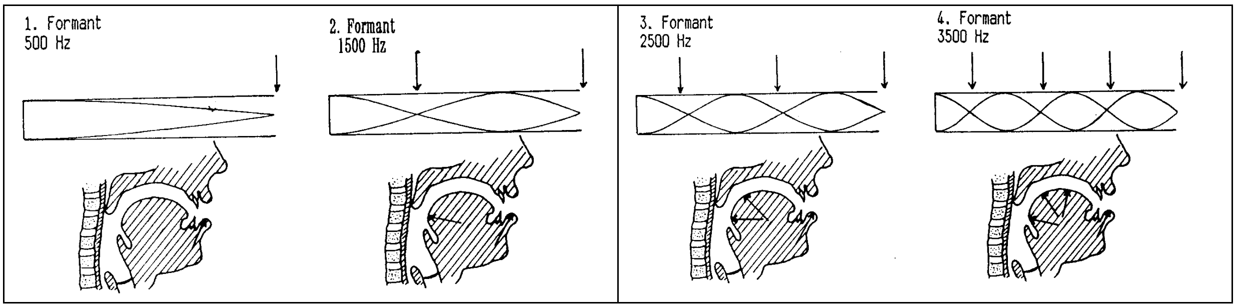


2.3.2 Formanttheorie der Vokale

Vokaltrakt bzw. Resonanzkörper
(Rachen- und Mundraum (primär), Nasenraum (sekundär))

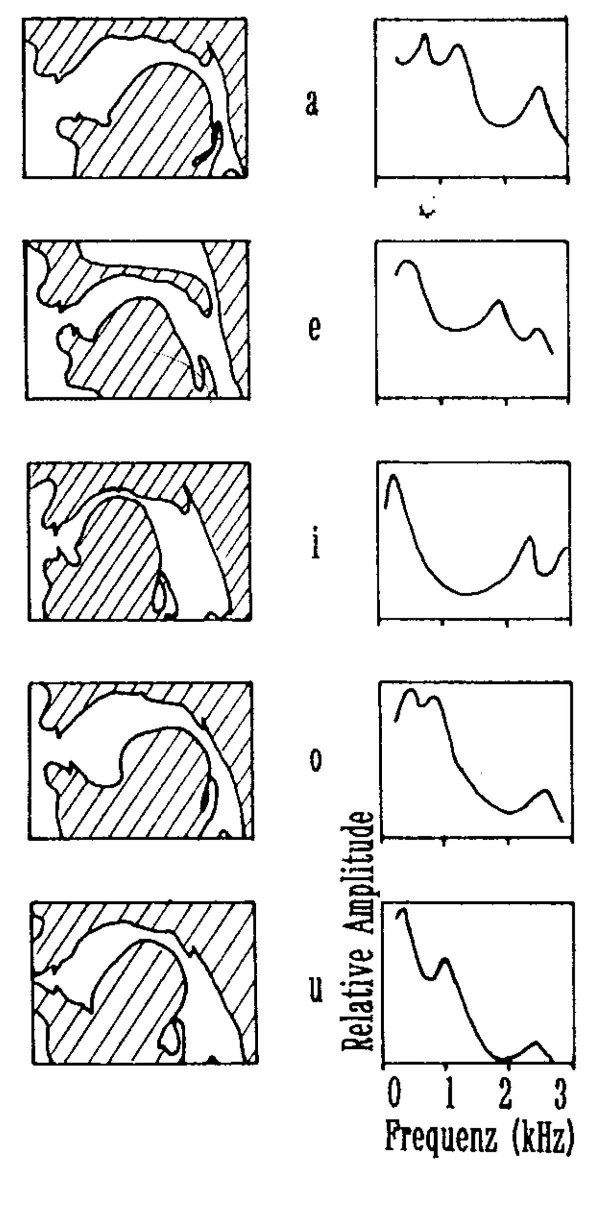
- Modell einer einseitig geschlossenen (Stimmbänder) **Luftsäule der Länge 17,5cm**
- Dies ergibt eine **Grundfrequenz** von $f = c/4\lambda = 333 / 0{,}7$ Hz = ca. 500 Hz
- siehe Abb.: Knotenpunkte des Drucks durch Pfeile markiert

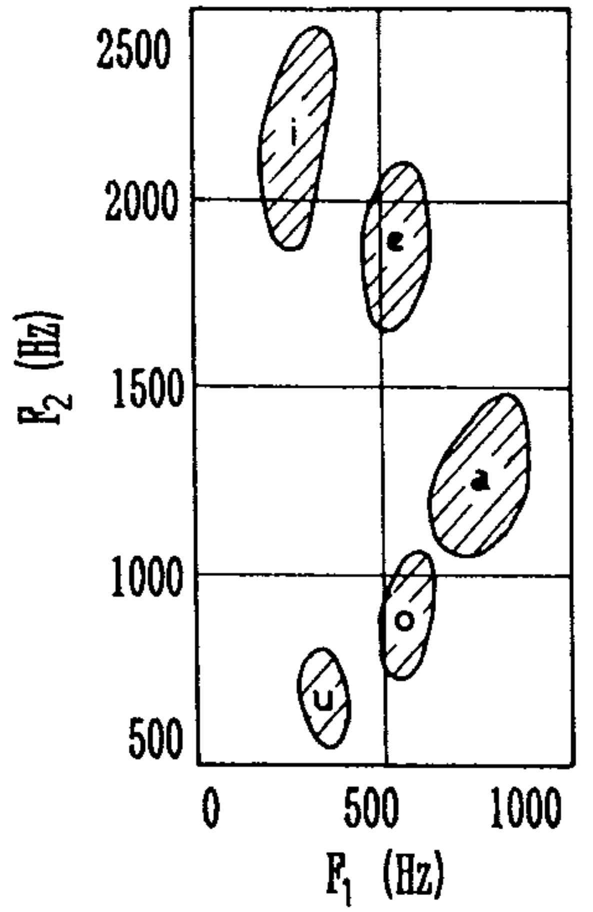
- Diese Resonanzbereiche für Grund- und Oberschwingungen nennt man **Formanten**
- Die Mundhöhle als Resonator ist **unabhängig von der Tonhöhe**



- Der **resonante Vokaltrakt** modifiziert den von den Stimmlippen erzeugten Klang, wobei
  - die Bereiche an und nahe der Eigenfrequenzen **verstärkt** und
  - die dazwischenliegenden Bereiche **geschwächt** werden
    (siehe Abbildung zum linearen Modell).

- Die Formanten können durch **Veränderungen der Luftsäule** (Mund und Zungenbewegung) in der Frequenz verschoben werden (d.h. weg von einfacher Luftsäule, vgl. Geigenkörper)
- Die folgende Abbildung vergleicht **Röntgenaufnahmen beim Sprechen der Vokale a, e, i, o, u** mit den Einhüllenden der dazugehörigen Frequenzspektren.





		I	E	A	O	U
F1	M	270	530	730	570	300
	F	310	610	850	590	370
	K	370	690	1030	680	430
F2	M	2290	1840	1090	840	870
	F	2790	2330	1220	920	950
	K	3200	2610	1370	1060	1170
F3	M	3010	2480	2440	2410	2240
	K	3310	2990	2810	2710	2670
	K	3730	3570	3170	3180	3260

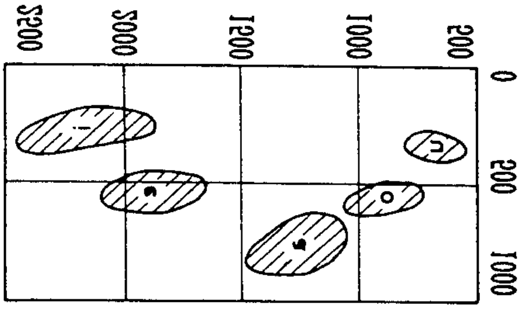
In grober Näherung kann man sagen, daß

- der **erste Formant** mit der **vertikalen Stellung** der Zunge
  (oben = tiefe Frequenz, unten = hohe Frequenz)

- der **zweite Formant** mit der **horizontalen Stellung**
  (vorne = hohe Frequenz, hinten = tiefe Frequenz)

zusammenhängt.

Vergleiche hierzu z.B.



- Vokal "i" mit
  oben (300 Hz) und vorne (2500 Hz)
- Vokal "o" mit
  unten (600 Hz) und hinten (900 Hz)
- Vokal "a" mit
  unten (800 Hz) und hinten (1250 Hz)

- Man sieht, daß höchstens **zwei bis drei Formanten** zu einer Charakterisierung ausreichen.
- In der Tabelle sind die Durchschnittwerte der ersten drei Formanten für die Vokale angegeben, jeweils für Männer, Frauen und Kinder. Einen besseren Überblick bietet die sogenannte **Formantkarte**, bei der die beiden ersten Formantfrequenzen gegeneinander aufgetragen sind.

Singstimme		Frequenzbereich [Hz]	Stimmlippen [mm]
Männer	Bass	85 - 329	24-25
	Tenor	130-430	17-20
Frauen	Alt	170-640	18-19
	Sopran	250-1100	14-17

	Sprachfrequenz [Hz]	Längenzunahme in der Pubertät
Männer	100-200	10
Frauen	200-380	3

2.3.3 Weitergehende Informationen

2.3.3.1 Konsonanten

- Bei **stimmlosen Konsonanten wie „f", „sch" oder „s"** sind die Stimmbänder offen; der Luftstrom wird durch Verengungen am Gaumen, zwischen Zunge und Zähnen bzw. zwischen den Lippen geführt, wobei durch Turbulenz ein unperiodischer, rauschartiger Schallvorgang entsteht. Das Spektrum zeigt viele Obertöne, die aber nicht Harmonische sind. Eine Zwischenposition nimmt das **„h"** ein, bei dem der Luftstrom auch leicht die Stimmbänder aktiviert.

- Bei den **Verschlußlauten "k", "p", "t"** wird der unmodulierte Luftstrom bei verschiedenen Stellen des Mundraums gestaut und dann plötzlich freigegeben. Einer kurzen Sprechpause folgt dabei ein explosionsartiger Knall - daher auch die Bezeichnung „Plosivlaute". Ebenfalls eine Mittelstellung mit stimmhaften und stimmlosen Anteilen haben die Verschlußlaute **„g", „b" und „d".**

- Bei den **nasalen Lauten „m", „n", „ng"** wird das Rachenzäpfchen herabbewegt, der Luftstrom durch die Nase geführt und der Mundraum für kurze Zeit blockiert.

2.3.3.2 Ausgebildete Gesangsstimmen

- Bei Sopranistinnen liegt die Gesangsfrequenz meist über der Formantfrequenz und wird infolgedessen durch den Vokaltrakt nicht sehr verstärkt. Durch **Formantverschiebung** (Änderung der Mundststellung) wird die Frequenz des ersten Formanten in die Nähe der Gesangsfrequenz (so weit möglich) geschoben.

- Bei Männerstimmen (vor allem Bass) werden durch die Formanten nur höhere Harmonische der Singgrundfrequenz verstärkt.

- Ausgeprägter **Reichtum an Obertönen** durch verringerte Impulsbreite der Stimmlippenöffnung (d.h. Verlängerung der Zeiten, in denen die Stimmlippen geschlossen sind). Dies wird durch Atemtraining erreicht.

- **Festliegender Gesangsformant bei 2500-3000 Hz** (bei Männer- und Frauenstimmen), welcher gestattet, die Singstimme aus der Orchestermusik herauszuhören, da in diesem Frequenzbereich die Orchesterintensität deutlich geringer ist. Dieser zusätzliche Formant gründet in einem zusätzlichen Resonanzraum (zwischen falschen und echten Stimmlippen) durch **Absenkung des Kehlkopfes um ca. 2 cm.**

- **Intensität und Frequenz- (bzw. Lautstärke und Tonhöhen) Vibrato mit f @ 6 Hz.**
  - Spannungszustände der Muskeln werden laufend geändert und ermüden weniger rasch (ein längeres Anhalten eines konstanten Spannungszustandes ermüdet).
  - Bei niederen Frequenzen wird das Vibrato eher durch die Stimmbänder erzeugt, bei höheren Frequenzen eher durch den Vokaltrakt

  - Durch das Vibrato
    - klingt der Ton für den Hörer voller und subjektiv lauter und
    - läßt sich durch den Sänger besser kontrollieren

    (Gehör sensitiver für Veränderungen denn für konstante Reize).

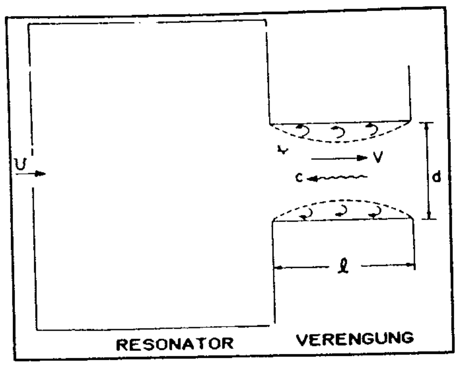
2.3.3.3 Pfeifen

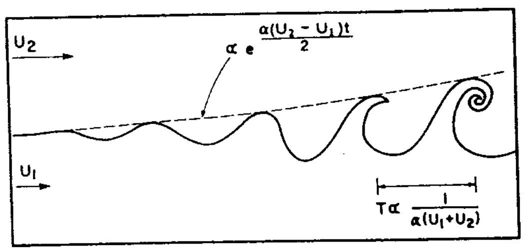
- Oszillieren bei der Sprach- und Tonerzeugung die Stimmlippen (geschlossenes Ende analog zu den Rohrblattinstrumenten)
  so oszilliert beim Pfeifen praktisch nur der Luftstrom (analog zu Flöten).

- Die **rhythmische Turbulenz des Luftstroms** entsteht durch eine Randzone und der damit verbundenen Übergangszone von **Luftströmen unterschiedlicher Geschwindigkeiten.**
- Die Turbulenzen wandern rückwärts und beeinflussen dadurch wiederum den einströmenden Luftstrom (**Rückkopplung**).

- Die Tonhöhe ist abhängig von
  - der Größe der Lippenöffnung und
  - der Geschwindigkeit

  der hindurchströmenden Luft.





2.3.3.4 Stimmen im Tierreich / Menschwerdung durch Sprache

- Vögel haben zur Lautbildung ein eigenes Organ, die sogenannte **Syrinx** (siehe Abb.). Diese besteht aus dünnen Häuten, den sogenannten **Paukenmembranen**, die in zweifacher Ausführung nach der Gabelung der Luftröhre in einen Luftsack in den Bronchien eingebettet sind.
- Im Gegensatz zum Stimmlippenton der Menschen sind die **Töne der Vögel obertonarm**, d.h. sinusförmig
- Der anatomische Unterschied zwischen **Menschen und Affen,** der sprachliche Kommunikation ermöglicht, ist in der **tieferen Lage des Kehlkopfes** begründet. Der beträchtlich verlängerte Vokaltrakt ist nötig, um die verschiedenen Formanten erzeugen zu können.

- Aufgrund der anatomischen Änderungen an der Schädelbasis (zur Halterung des abgesenkten Kehlkopfes) kann man die Ausbildung einer differenzierten Lautbildung in die Zeit der Neandertaler (vor ca. 120.000-40.000 Jahre) datieren.
- Nachteil eines tiefer liegenden Kehlkopfes ist das **Risiko des Verschluckens**.
- Die tiefere Lage des Kehlkopfes bildet sich auch beim Menschen erst **innerhalb der ersten Jahre** nach der Geburt aus (Babys können gleichzeitig an der Brust nuckeln und durch die Nase atmen, haben jedoch eine sehr geringe Sprachfähigkeit).

2.4 Membrane / Flächenhafte Schallgeber

- gespannte Trommelfelle als Membran = einfachste **flächenhafte Schallgeber**
- Die Spannung ist wie bei der Saite die rückführende Kraft, die das System in Schwingung versetzt, nachdem es von einem darauf ausgeübten Druck verformt worden ist.
- Im Gegensatz zu den harmonischen Obertönen einer Saite,
  besitzt die Membran jedoch nur **anharmonische Obertöne**.

- Die **Pauke** löst im Gegensatz zu anderen Trommelarten
  ein **Tonhöhenempfinden** aus, was sie zum wichtigsten Schlaginstrument im Orchester macht.

- **Erklärung hierfür.**
  - Das Trommelfell der Pauke **schwingt unter der Last der Luftsäule** (Atmosphäre). Die so in Bewegung gesetzte Luftmasse wogt hin und her und setzt die **Oberfrequenzen herab**.
  - Die im Kessel eingeschlossene Luft besitzt ihre eigenen Resonanzen
    und wechselwirkt mit den Frequenzen des gespannten Trommelfells.
  - Die Steifigkeit der Membran führt zur Erhöhung der Frequenzen der oberen Harmonischen.

Durch Änderung der **Trommelfellspannung** kann die Pauke
über einen Bereich von **mehr als einer Oktave** gestimmt werden
  - **Verdoppelt** man die Membranspannung,
    so erhöht sich ihre Frequenz um eine **halbe Oktave**.
  - Moderne Pauken haben pedalbetriebene Spannvorrichtungen.

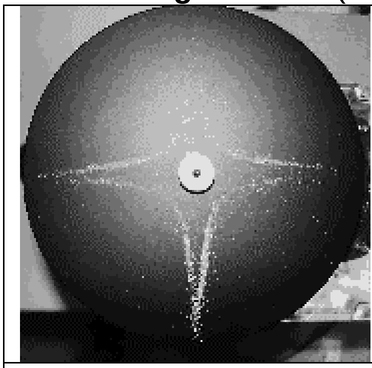
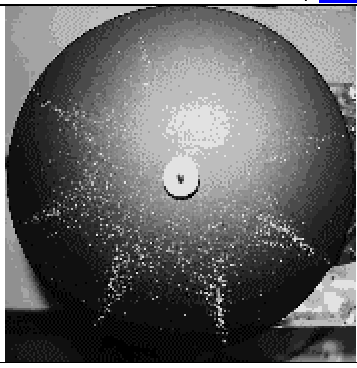
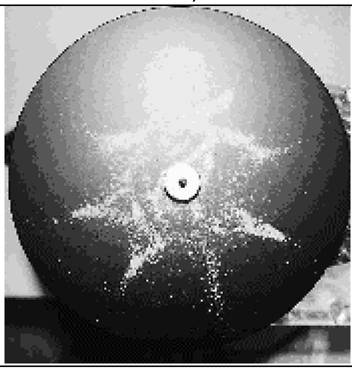
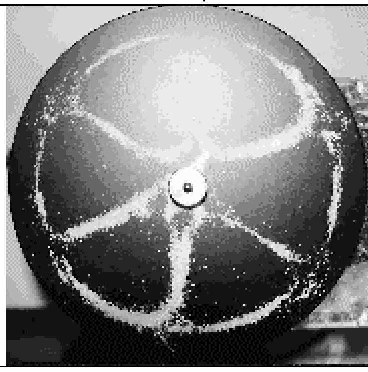
2.4.1 Chladnische Klangfiguren
(Ernst Florenz Friedrich Chladni, 1787)

Versuch
- feiner Sand auf Metallplatten
- Fixierung an einer oder mehreren Stellen
- Schwingungsanregung durch
  - Lautsprecher unter Metallplatte
  - Elektromagneten
  - Violinbogen
- Sperrholzmodell eines Geigenkörpers

- **analog zum Kundtschen Rohr, nur zweidimensional:**
  - Sand wird von den schwingenden Flächen (Schwingungsbäuche) weggeworfen
  - und sammelt sich an den Schwingungsknoten

- Tamburin: Sand innen reinstreuen
- nasse Einmachfolie auf beliebigen Drahtkörper (z.B. Geigen, Gitarrenkörper) spannen
- Metallplatte und magnetische Anregung
- Metallplatte und Geigenbogenanregung

Kreisförmige Platten (aus Akustik in der Musik, http://www.sushi-page.de)

		
f = 204,7 Hz	f = 278,9 Hz	f = 478,3 Hz
		
f = 836,4 Hz	f = 1351 Hz	f = 2015 Hz

Eigene Messungen mit großer Aluplatte:

120	**144**	**214**	**252**	**322**	**427**	**644**	**900**	**1200**	**1535**	**1910**

Die Frequenz ist

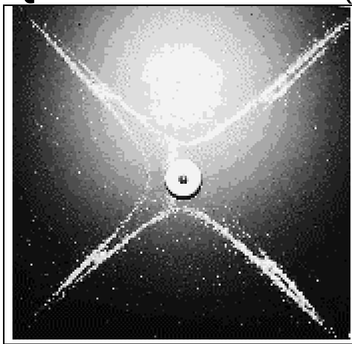
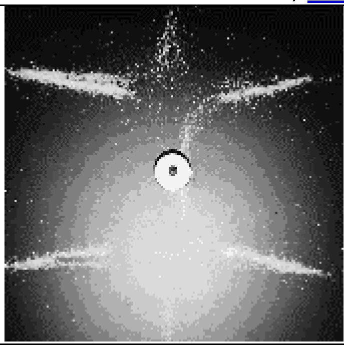
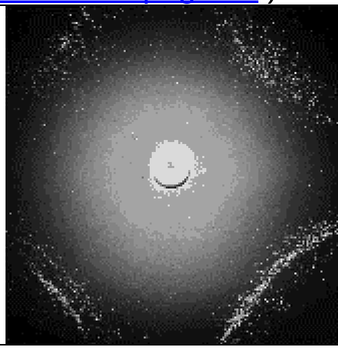
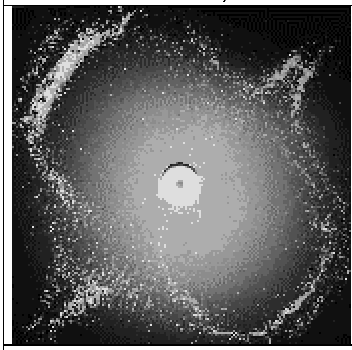
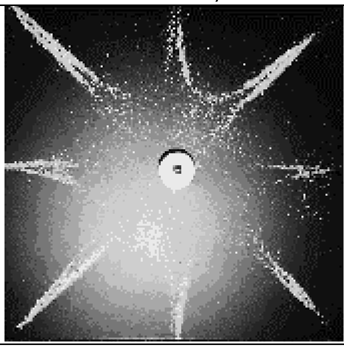
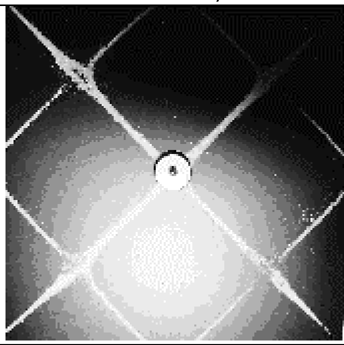
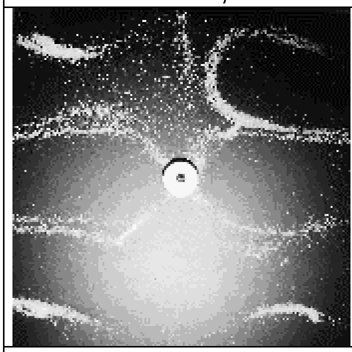
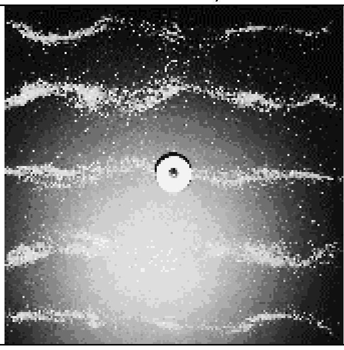
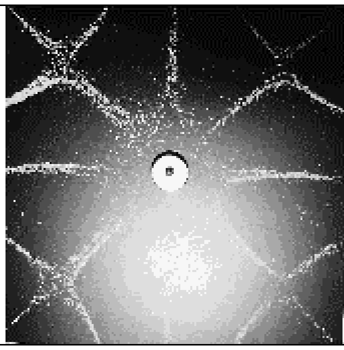
- proportional zur Plattendicke (Steifigkeit)
- indirekt proportional zur Plattenfläche

Literaturwerte für die ersten 12 Oberschwingungen relativ zur Grundschwingung:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1,59	2,14	2,30	2,65	2,92	3,16	3,50	3,60	3,65	4,06	4,15

d.h. Die Oberschwingungen sind keine Harmonischen zur Grundfrequenz.

Quadratische Platten (aus Akustik in der Musik, http://www.sushi-page.de)

		
f = 181,1 Hz	f = 334,3 Hz	f = 426,8 Hz
		
f = 604,4 Hz	f = 657,3 Hz	f = 1115 Hz
		
f = 1263 Hz	f = 1898 Hz	f = 1945 Hz

2.5 Übungsstunde / Klangfarbe mit CoolEdit

- Klangspektrum = Frequenz-Ordinate (Tonhöhe) und Schalldruck-Abszisse
- Formanten = Obertonbereiche

▪ CoolEdit im Unterricht

- Klangspektrum einer Sinusschwingung (Stimmgabel)
- Klangspektrum einer Schwebung (verstimmte Stimmgabeln)
- Eigene Synthese von
  Sinusfunktion, Schwebung, Rechteckfunktion, Dreiecksfunktion

- Klangspektrum der Rechteckschwingung (Frequenzgenerator)
- Klangspektrum der Dreiecksschwingung (Frequenzgenerator)

Mögliche CoolEdit Versuche:
Aufnahme des Klangspektrums
- einer Stimmgabel (Sinus)
- bei Anzupfen einer Monochord-Saite in der Mitte (Dreieck),
  am Rand und zeitlicher Verlauf (Sägezahn → Dreieck)
- bei Anstreichen einer Monochord Saite

2.5.1 Überblick

Wellenform	Obertonspektrum	Klangfarbe	Instrument
Sinus	keine Obertöne	butterweich	synthetisch
Dreieck	wenige ungeradzahlige Obertöne	sanft	Flöte / Orgel
Sägezahn	alle Obertöne, welche in ihrer Amplitude um 6dB/Oktave abfallen	schneidend	Geige
Rechteck	nicht so viele Obertöne	nicht ganz so schneidend wie der Sägezahn	Oboe

hart	= hoher Anteil von Obertönen (Trompete)
weich	= geringer Anteil von Obertönen (Querflöte)
hell	= viele dominante Obertöne
dumpf	= schwache hochfrequente Obertöne

Stimmgabel:
- reiner Sinuston (bei Anschlag mit Gummihammer)
- bzw. geringe Anzahl von Oberschwingungen

Trompete:
- harter Klang = hoher Anteil von Obertönen

Querflöte:
- weicher Klang = geringer Anteil von Obertönen

Oboe, Saxophon, Klarinette:
- ungeradzahligen Vielfachen dominieren: $f=(2k+1)\ [c / 4L]$
- Randbedingungen: ein Ende offen, eines geschlossen
- Klarinette: Der Pegel fällt nahezu linear im Obertonspektrum ab.

Geige:
- Anregungsvorgang streichend
- Sägezahn, d.h. alle Obertöne, welche in ihrer Amplitude um 6dB/Oktave abfallen

Gitarre:
- Alle Dämpfungsmechanismen, die der Saite Energie entziehen, wirken sich auf die hohen Frequenzkomponenten viel stärker aus, als auf die tiefen. Kurz nach dem Anzupfen existieren infolgedessen die hohen Fourierkomponenten nicht mehr.

Klavier:
- Während der Ton abklingt, ändert sich die Klangfarbe:
- Kurz nach dem Anschlag klingt der Klavierton hart (starke Obertöne).
- Der Grundton übernimmt allmählich die Führung (sinusförmig)
- Die Obertöne sind nur angenähert Harmonische
  (ab der 4. Harmonischen weicht die Frequenz nach oben ab).

Blockflöte:
- Während des Einschwingens dominiert der Anteil mit der doppelten Frequenz (1500 Hz) des Grundtons (750 Hz), nimmt auf Kosten des Grundtons ab und trägt im weiteren Verlauf als breites Frequenzband zur Klangfarbe des Instruments bei.
- anharmonische und niederfrequente Anteile rühren von Turbulenzen und Druckschwankungen während des Anblasens her

3 Tonsysteme / Musikalische Stimmungen

3.1 Harmonie: Konsonanz und Dissonanz

- Bisher nur mit **einem** Klang bzw. einer Tonhöhe beschäftigt
- Jetzt geht es um das **Zusammenklingen (Konsonanz)** zweier oder mehrerer Klänge

Ergebnis (für später): Die Tonhöhe wird durch die Frequenz bestimmt
Die Tonintervalle durch das **Frequenzverhältnis**

Pythagoras von Samos (570-480 v. Chr.)

- Harmonie = Verhältnis kleiner ganzer Zahlen (Rationale Zahlen)
- Zahlen und Proportionen haben *tieferen Sinn*,

z.B.:

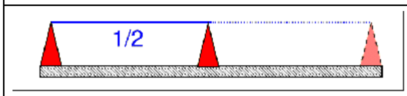
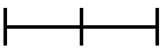
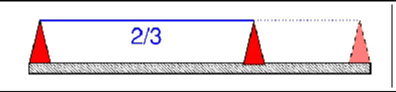
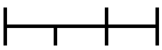
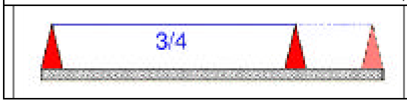
- pythagoräische Zahlen: $a^2 + b^2 = c^2$ (3,4,5)
- platonische Körper, regelmäßige Polyeder

Untersuchung des

- harmonischen Zusammenklangs (Konsonanz) zweier Töne
- Zusammenhangs zwischen Saitenlänge und Tonhöhe

Versuch: Messung der Frequenzen am Monochord mit Oszilloskop

- entweder mit Mikrofon
- oder mit Tonabnehmer d.h. Pick-up-Spule

			$\frac{15}{8} \Big/ \frac{5}{3}$	
		$\frac{5}{3} \Big/ \frac{3}{2}$	**Oktave**	$\frac{f}{f_0} = \frac{2}{1}$
		$\frac{L}{L_0} = \frac{2}{3}$	**Quint**	$\frac{f}{f_0} = \frac{3}{2}$
		$\frac{L}{L_0} = \frac{3}{4}$	**Quart**	$\frac{f}{f_0} = \frac{4}{3}$

Elementare konsonante Tonintervalle
(Konsonanz von Klangintervallen aufgrund zusammenfallender **Obertonspektren**)

Auszug aus Galilei, Galileo: Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend",.1638

"Das primäre, unmittelbare Verhältnis der akustischen Intervalle wird weder von der Länge der Saiten noch von ihrer Spannung oder ihrem Querschnitt bestimmt, sondern von der Anzahl der Schwingungen und Lufterschütterungen, die unser Trommelfell treffen und letzteres entsprechend erzittern lassen. Halten wir dieses fest, so können wir mit Sicherheit angeben, weshalb uns einige Zusammenklänge angenehm, andere weniger angenehm und wieder andere sehr mißfallend berühren, also den Grund für die mehr oder minder vollkommene Konsonanz und für die Dissonanz..
Konsonant und wohlklingend werden diejenigen Intervalle sein, deren Töne in einer gewissen Ordnung das Trommelfell erschüttern; wozu vor allem gehört, daß die Schwingungszahlen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, damit die Knorpel des Trommelfells sich nicht in steter Qual befinden, in verschiedenen Richtungen ausweichen zu müssen und den auseinandergehenden Schlägen zu gehorchen.

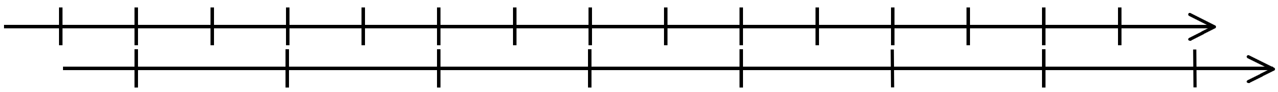
> Deshalb ist die erste und vollkommenste Konsonanz die Oktave, weil auf jede Erschütterung des tieferen Tones zwei des höheren kommen, so daß beide abwechselnd zusammenfallen und auseinandergehen ... Die Quinte klingt auch sehr gut, weil auf die zwei Schwingungen der einen Saite die höhere drei Schwingungen vollführt, von denen also ein Drittel mit denen des tieferen Tones zusammenfällt; und bei der Quarte trifft die vierte Schwingung mit der des Grundtones zusammen. Bei der Sekunde trifft nur noch eine von neun Schwingungen eine Schwingung des tieferen Tones, alle anderen weichen ab, und daher empfindet man bereits eine Dissonanz"

Bemerkung:

- Dies von den Schülern erklären bzw. übersetzen lassen
- **Oktave: "auf jede Erschütterung",**
  d.h. auf eine Periode des tieferen Tones $T_0 = 2$ T kommen zwei Perioden des höheren bzw. Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit des höheren Tones $f = 2\ f_0$ doppelt so groß.
- **Quint: "auf zwei Schwingungen der einen" ..:**
  $2\ T_0 = 3\ T$ bzw. $T/T_0 = 2/3$ bzw. $f/f_0 = 3/2$
- **Quarte: "die vierte Schwingung...":**
  $3\ T_0 = 4\ T$ bzw. $T/T_0 = 3/4$ bzw. $f/f_0 = 4/3$

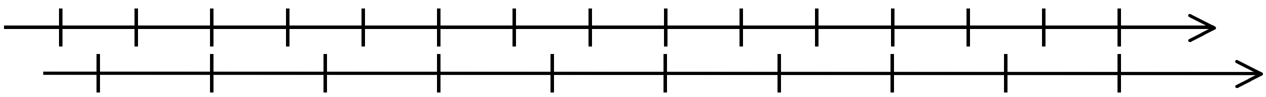
Oktave: ($f = 2\ f_0$)

Der höhere **Klang** ($f_2 = 2\ f_1$) hat nur **Obertöne**,
welche auch im tieferen Klang vorhanden ist



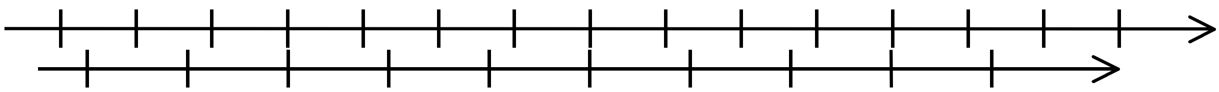
Quint: ($f = 3/2\ f_0$)

Jeder **zweite Oberton** des höheren Klangs
ist im Obertonspektrum des tieferen Klangs enthalten



Quart: ($f = 4/3\ f_0$)

Jeder zweite Oberton des höheren Klangs ($f_2 = 2\ f_1$)
ist im Obertonspektrum des tieferen Klangs enthalten



> **Merksatz:** Zwei Klänge werden als **konsonant** (zusammenklingend) empfunden, wenn sie **viele gemeinsame Obertöne** besitzen.
> Je geringer die Zahl der gemeinsamen Obertöne, desto **dissonanter** der Zusammenklang.

- Nicht die absoluten Frequenzwerte, sondern die **Frequenzverhältnisse** sind ausschlaggebend, ob Konsonanz oder Dissonanz vorliegen !
- Frequenzverhältnis zweier Töne bezeichnet man als **Tonstufe oder Intervall**
- **Die Schwingungsverhältnisse der Obertöne** entscheiden über Konsonanz und Dissonanz

- **Vollkommene Konsonanzen:** Oktave, Quint
- **Unvollkommene Konsonanzen:** Quarte, große und kleine Terz, große und kleine Sexte
- Dissonanzen: große und kleine Septime, große und kleine Sekund

Bemerkung: **Bezeichnungsweisen für verschiedene Tonlagen:**

	Bezeichnung der Oktav-Anfangstöne								
im deutschen Sprachraum	C_2	C_1	C	c	c^1	c^2	c^3	c^4	c^5
nach Helmholtz	C_{II}	C_I	C	c	c'	c''	c'''	c''''	c^V
nach USA Norm	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8

3.1.1 Aufbau der pythagoräischen Tonleiter über Ganz- und Halbtonintervalle / Monochord

Bemerkungen:

- Pythagoras kannte keine Frequenzen, sondern nur Saitenlängen.
  Dies ist aber gleichwertig mit der folgenden Frequenzbehandlung.
- Die in Klammern angedeutete Abhängigkeit der physikalischen Frequenz von der physikalischen Tonbezeichnung ist keine Abhängigkeit im funktionalen Sinne. Besser wären Indices !!!

Prinzip: **Einem musikalisch empfundenen festen Intervall zweier Töne entspricht physikalisch dem Verhältnis der beiden Frequenzen f1 / f2**

Konsequenz: **Der Summe zweier musikalischer Tonintervalle entspricht physikalisch dem Produkt der entsprechenden Frequenzverhältnisse.**

Tonbezeichnung:	**C**	**G**	**c**
Tonintervall:	**Quint**	**Quart**	
Frequenzverhältnis:	$\frac{f(G)}{f(C)}=\frac{3}{2}$	$\frac{f(c)}{f(G)}=\frac{4}{3}$	
Frequenz	**f(C)**	**f(G)**	**f(c)**

Oktav

Andere Schreibweise: $f(c)=\frac{4}{3}f(G)=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}f(C)\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}f(C)=\frac{2}{1}f(C)$

Quint + Quart	= Oktav
$\frac{f(G)}{f(C)}\cdot\frac{f(c)}{f(G)}$	$=\frac{f(c)}{f(C)}$
$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$	$=\frac{2}{1}$

Konsequenz: **Der Differenz zweier musikalischer Tonintervalle entspricht physikalisch der Quotient der entsprechenden Frequenzverhältnisse.**

Oktav - Quart	= Quint
$\frac{f(c)}{f(C)}\Big/\frac{f(c)}{f(G)}$	$\frac{f(G)}{f(C)}$
$\frac{2}{1}\Big/\frac{4}{3}$	$=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Aufgabe: Berechnen Sie das Frequenzverhältnis für einen **Ganztonschritt (Sekund)** in pythagoreischer Stimmung:

Oktav			
C		G	c
Quint		Quart	
Quart	Quint		
F	Sekund	G	

C		G
Quint		Tonintervall
$\frac{f(G)}{f(C)} = \frac{3}{2}$		Frequenzverhältnis
C	F	G
Quart	Sekund	Tonintervalle
$\frac{f(F)}{f(C)} = \frac{4}{3}$	$\frac{f(G)}{f(F)} = \frac{9}{8}$	Frequenzverhältnis
f(C)	f(F)	f(G)

Rechenschritt

Quint - Quart	= Sekund
$\frac{f(G)}{f(C)} \Big/ \frac{f(F)}{f(C)}$	$\frac{f(G)}{f(F)}$
$\frac{3}{2} \Big/ \frac{4}{3}$	$= \frac{9}{8}$

Aufgabe: **Vervollständigung der Pythagoräischen Tonleiter:**

Oktave	
Quart	Quint
4 / 3	3 / 2

Frequenzverhältnis relativ zum Vorgänger (Ganzton bzw. Halbtonschritt)

C	D	E	F	G	A	H	C
Sekund	Sekund	Halbton	Sekund	Sekund	Sekund	Halbton	
9 / 8	9 / 8		9 / 8	9 / 8	9 / 8		

Terz	Halbton	Tritonus	Halbton
$(9 / 8)^2 = 81 / 64$	256 / 243	$(9 / 8)^3 = 729 / 512$	256 / 243

Frequenzverhältnis relativ zum Grundton C

C	D	E	F	G	A	H	C
1	9 / 8	81 / 64	4 / 3	3 / 2	27 / 16	243 / 128	2

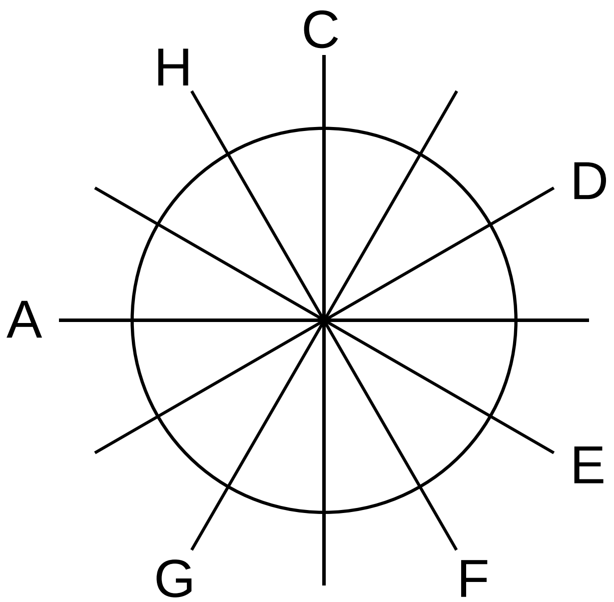
Berechnung des pythagoräischen Halbtonschrittes:

Quart - Terz: $\frac{4}{3}\Big/\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{2\cdot 2}{3}\left(\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 2^3 = \frac{256}{243}$

Quint - Tritonus: $\frac{3}{2}\Big/\left(\frac{9}{8}\right)^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 2^3 = \frac{256}{243}$

$\Rightarrow$ Die **Quint (f' / f = 3 / 2)**
spielt die entscheidende Bedeutung beim Aufbau der pythagoräischen Tonleiter

3.1.2 Aufbau der pythagoräischen Tonleiter über den Quintenzirkel



Prinzip:

- **Quintensprünge aufwärts (im Urzeigersinn):** **Multiplikation mit Faktor (3/2)**
- **Quintensprünge abwärts (gegen Urzeigersinn):** **Multiplikation mit Faktor (2/3)**
- **Bei Überschreiten der Oktave** **Runteroktavieren Faktor (1/2)**

F	**C**	**G**	**D**	**A**	**E**	**H**
$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{4}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{5}$	
1 Oktav nach oben		1 Oktave nach unten		2 Oktaven nach unten		
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	
F	**C**	**G**	**D**	**A**	**E**	**H**
$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$

Weiterführung liefert die **Halbtöne** **H - Fis - Cis - Gis - Dis - Ais - Eis - C**

Problem rationaler Frequenzverhältnisse: **Quintenzirkel schliesst sich nicht !**

Aufgrund der Anzahl der Halbtonschritte müsste gelten:

$$\frac{\text{Quint}}{\text{Oktave}} = \frac{7}{12} \Rightarrow \qquad \text{12 Quinten = 7 Oktaven}$$

Es gilt jedoch: $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^7$

Die Tondifferenz bei Kreisschluß des Quintenzirkels nennt man

pythagoräisches Komma $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \Big/ 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288}$

3.2 Naturtonreihe / Blechbläser / Diatonische Tonleiter

Versuch: Messung der Frequenzen des Heulrohres mit Oszilloskop

Diese Töne kommen durch eine Resonanz der Luftströmung im Inneren des Rohres zu Stande. Abhängig von der Geschwindigkeit wird jeweils nur einer der Partialtöne verstärkt. Die entstehenden Töne bilden zusammen die sogenannte Naturtonreihe. Sie entsteht auch bei vielen Musikinstrumenten, z.B. bei Blechbläsern.

Die Folge der (musikalischen) Naturtonreihe entspricht der Folge der (physikalischen) Harmonischen (Obertöne bzw. Partialtöne)

C1	**C**	**G**	**c**	**e**	**g**	**b**	**c^1**	**d^1**	**e^1**
f_0	**$2 f_0$**	**$3 f_0$**	**$4 f_0$**	**$5 f_0$**	**$6 f_0$**	**$7 f_0$**	**$8 f_0$**	**$9 f_0$**	**$10 f_0$**

Die Intervalle zwischen den Obertönen sind deshalb von Natur aus konsonant

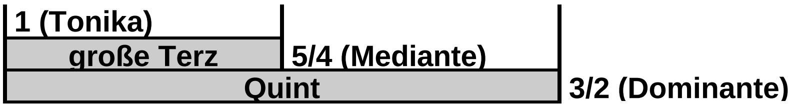
<table>
<tr><td>$\frac{2}{1}$</td><td>$\frac{3}{2}$</td><td>$\frac{4}{3}$</td><td>$\frac{5}{4}$</td><td>$\frac{6}{5}$</td><td>$\frac{7}{6}$</td><td>$\frac{8}{7}$</td><td>$\frac{9}{8}$</td><td>$\frac{10}{9}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Oktave</td><td>Quint</td><td>Quart</td><td>große Terz</td><td>kleine Terz</td><td></td><td></td><td>große Sekund</td><td>kleine Sekund</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Oktave</td><td colspan="2">Quint</td><td colspan="2">Quart</td><td colspan="2" rowspan="2">große Terz</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Oktave</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="3">kleine Sexte</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td colspan="4">große Sexte</td><td></td></tr>
</table>

Versuch: Messung der Frequenzen der Trompete mit Oszilloskop

Naturtöne der Trompete: 116,5 Hz (B), 233 Hz (b), 349,5 Hz (f), 466 Hz (b')
Ventile verlängern das Hauptrohr entsprechend
Man benötigt nur 3 Ventile, um alle chromatischen Töne zu erzeugen !!!!!!!!

1. Ventil	große Sekund	9 / 8	1,125
2. Ventil	kleine Sekund	10 / 9	1,111
3. Ventil	kleine Terz	6 / 5	1,2
1.+ 2. Ventil	große Terz = große Sekund + kleine Sekund	(9 / 8)(10 / 9) = 5 / 4	1,25
1.+ 3. Ventil	große Sekund + kleine Terz	(9 / 8)(6 / 5) = 27/20	1,35
2.+ 3. Ventil	Quart = kleine Sekund + kleine Terz	(10/ 9)(6 / 5) = 4 / 3	1,33
1.+ 2.+ 3. Ventil	große Sekund + kleine Sekund + kleine Terz=	(9 / 8)(10 / 9)(6 / 5) =	
kein Ventil	Quint	3 / 2	1,5

Dur-Dreiklänge bestehen aus
Prim (Tonika), großer Terz (Mediante) und Quint (Dominante).

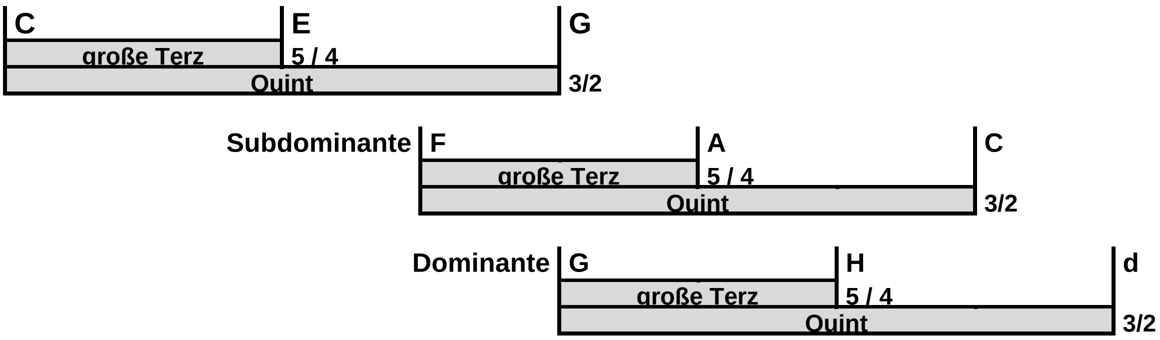


Die natürliche diatonische Dur Tonleiter ergibt sich durch
Aufbau dreier Dur-Dreiklänge auf Tonika, Dominante und Subdominante

- Tonale Musik ist auf diesen drei Stufen aufgebaut im Gegensatz zur atonalen Musik (z.B. Zwölftonmusik)

Frequenzverhältnisse relativ zum Grundton C

C	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C**	**d**
1	**9 / 8**	**5 / 4**	**4 / 3**	**3 / 2**	**5 / 3**	**15 / 8**	**2 / 1**	**9 / 4**



Die natürliche diatonische Dur Tonleiter (Frequenzverhältnisse **relativ zum Grundton C**):

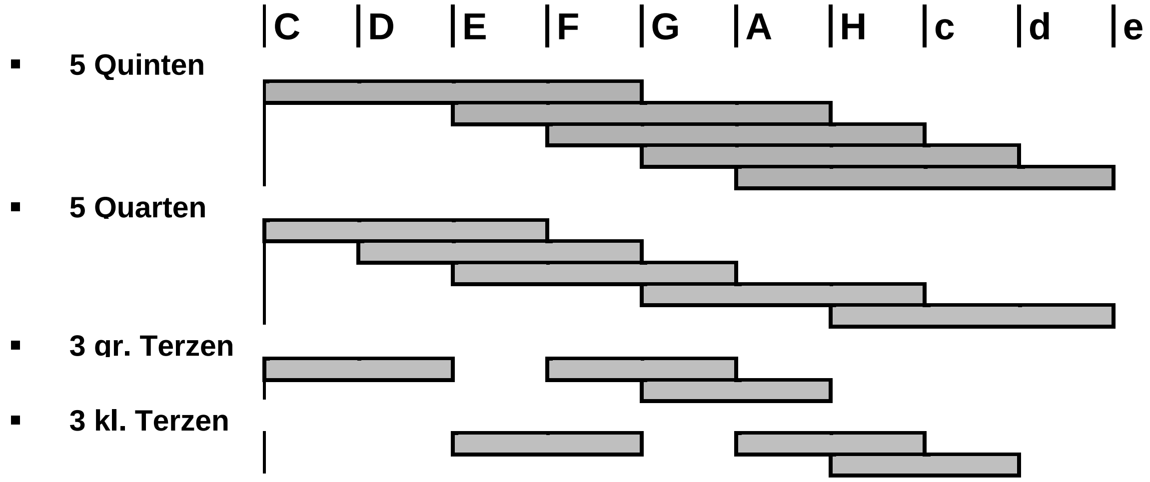
C	**D**	**E**	**F**	**G**	**A**	**H**	**C**
1	**9 / 8**	**5 / 4**	**4 / 3**	**3 / 2**	**5 / 3**	**15 / 8**	**2**

Die natürliche diatonische Dur Tonleiter (Frequenzverhältnisse **benachbarter Töne**):

$\frac{9}{8}\Big/1$	$\frac{5}{4}\Big/\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}\Big/\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}\Big/\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}\Big/\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}\Big/\frac{5}{3}$	$2\Big/\frac{15}{8}$
9 / 8	10 / 9	16 / 15	9 / 8	10 / 9	9 / 8	16 / 15
große Sekund	kleine Sekund	Halbton	große Sekund	kleine Sekund	große Sekund	Halbton

- Alle Töne bis auf Sekund und Septime bilden mit dem Grundton Konsonanzen.
- Die diatonische Tonleiter erfüllt optimal die Forderung nach einer harmonischen Zusammenstellung und wird auch **"Reine" Tonskala** bzw. **"Reine Stimmung"** genannt.

Fülle von konsonanten Tonintervallen mit kleinen Verhältniszahlen innerhalb einer Oktave:



Frequenz Verhältnis	Tonintervall	Harmonie empfinden
1 : 2	Oktave	vollkommene Konsonanzen
2 : 3	Quinte	
3 : 4	Quarte	
3 : 5	große Sexte	unvollkommene Konsonanzen
4 : 5	große Terz	
5 : 6	kleine Terz	
5 : 8	kleine Sext	
4 : 7	kleine Sept	Dissonanzen
7 : 10	Tritonus	
8 : 9	großer Ganzton	
9 : 10	kleiner Ganzton	

3.3 Temperierte Stimmung / Kammerton / Gitarrengriffbrett

Orchestermusik mit Instrumenten fester Tonlage bringt die Notwendigkeit mit sich, die Einzelinstrumente aufeinander abzustimmen.

Forderungen:

- Oktave bleibt rein, d.h. $f' / f_0 = 2 / 1$
- Insgesamt 12 Halbtonschritte (Fünf Ganztöne und zwei Halbtöne)
- Jeder dieser 12 Halbtonschritte sollte als Grundton einer Tonleiter einsetzbar sein.

Lösung: Halbtonschritte mit einheitlichem Frequenzverhältnis

$$\boxed{\frac{f_{n+1}}{f_n} = k \quad und \quad \frac{f_{12}}{f_0} = k^{12} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}12246}$$

Eine irrationales Frequenzverhältnis ist aus der pythagoreischen Zahlenmystik undenkbares Verhältnis. Wichtiger war nun das musikalische Empfinden und die prakt. Durchführbarkeit.

Die temperierte Stimmung liegt somit "vermittelnd"
zwischen der pythagoräischen und diatonischen Stimmung:

	Pythagoreisch	Diatonisch	Temperiert
c	1	1	1
d	1,12500	1,12500	1,12246
e	1,26563	1,25000	1,25992
f	1,33333	1,33333	1,33484
g	1,50000	1,50000	1,49831
a	1,68750	1,66667	1,68179
h	1,89844	1,87500	1,88775
c'	2	2	2

Kammerton A (440 Hz):

Allgemein verbindliche Festlegung der Tonskala auf eine bestimmt Tonlage innerhalb des Frequenzspektrums (Absolute Schwingungszahlen)

Logarithmisches Intervallmaß (siehe Weber-Fechner) in Analogie zum Schalldruckpegel:

- Die relativen Frequenzen aufeinanderfolgender Oktaven
  bilden die Potenzreihe von 2

$$Z = 1200 \cdot \log_2 \frac{f_1}{f_2} = \frac{1200}{\log 2} \cdot \log \frac{f_1}{f_2}$$

- Die dimensionslose Einheit (analog zu dB) wird hier **Cent** genannt
- Der Faktor 1200 entspricht der Vereinbarung,
  die Oktave in 1200 gleiche Intervalle einzuteilen.
- Ein Halbtonschritt entspricht dem Intervallmaß 100 Cent

4 Hörpsychologie / Weber-Fechnersches Gesetz

Die **Hörpsychologie** befaßt sich mit dem Zusammenhang, der zwischen den Schallschwingungen und den durch sie ausgelösten und schließlich bewußt gewordenen Sinnesempfindung besteht. Auf der einen Seite dieses Zusammenhangs steht **objektive Physik** - das Schallwellenfeld mit seinen Meßgrößen. Auf der anderen Seite stehen **Empfindungen**.

Typische **Fragestellungen der Hörpsychologie**, sind z.B:

- Welchen Einfluß hat die **Kurvenform** einer periodischen Schwingung auf den **Klang**, und wie kann man diesen Einfluß verstehen?

- Wie empfindlich reagiert unser Ohr auf Amplitudenunterschiede und wie hängt die empfundene **Lautstärke** von der **Amplitude** ab?

- Wie empfindlich reagiert unser Ohr auf **Frequenzunterschiede**?

Die Hörpsychologie ist eine **sehr aktuelle Wissenschaft**. Wenn heute Musikstücke im Internet transportiert werden können, und das mit bezahlbaren Telefonkosten (**MP3**), dann nur, weil Erkenntnisse dieser Wissenschaft es gestatten, die Datenmenge von Wave-Dateien auf ein Minimum zu reduzieren.

4.1 Lehrerversuche mit CoolEdit

4.1.1 Amplitude und Lautstärke

4.1.1.1 Absolute Reizschwelle (Lautempf.wav)

- **Abfolge vier amplitudenmodulierter Sinustöne (1 kHz)**
  mit Amax / Amin = 100 / 20, 100 / 80, 100 / 90 und 100 / 98.

- Änderung der Lautstärke ist allenfalls bis zur dritten Folge möglich
  unabhängig davon, mit welcher Gesamtlautstärke die Folge abgespielt wird.

4.1.1.2 Relativer Reizunterschied (Lautarex.wav)

- Auf- und absteigende Amplitudenfolge
  mit **konstanter Differenz $A_{n+1} - A_n$ = const**

  - Die Änderungen des Lautstärkepegels werden nicht als gleich empfunden.
  - Die Zunahme um 1 Einheit macht bei großer Amplitude weniger aus als bei kleiner.

  ⇒ Zwischen der Amplitude und der empfundenen Lautstärke
  besteht **kein proportionaler Zusammenhang.**

- Auf- und absteigende Amplitudenfolge
  mit **konstantem Verhältnis A_{n+1}/A_n = 1,26**

  ⇒ Die Änderungen des Lautstärkepegels
  werden jetzt **eher als gleich groß empfunden.**

Resumee:

Ob ein Ton 2 lauter empfunden wird als ein Ton 1 hängt nicht von dem Unterschied der Amplituden A_2-A_1 ab, sondern vom Verhältnis A_2/A_1.

4.1.2 Frequenz und Tonhöhe

4.1.2.1 Absolute Reizschwelle

- **Abfolge fünf frequenzmodulierter Sinustöne (1 Hz)**
  mit f_1 / f_2 = 1,02 (2%); 1,01 (1%); 1,005 (0,5%), 1,0025 (0,25%), 1,001 (0,1%)
  ⇒ Tonhöhenunterschiede bis zum dritten Block d.h. 0,5% (bei 1 kHz)

- **Änderung der Sampling Rate Þ Abspielgeschwindigkeit wird verändert**
  ⇒ Empfindlichkeit hat sich verändert

- **kontinuierliche Änderung der Frequenz (frequenzzuwachs.wav)**
  - Ansteigen der Frequenz eines Sinuston von 300Hz auf 310Hz
  - Nach Erreichen von 310Hz wird der anfängliche Ton 300Hz eingespielt.
  - Erst dann bemerkt man deutlich, daß der Ton sich inzwischen geändert hat.

4.1.2.2 Relativer Reizunterschied

- Aufsteigende Tonfolge
  mit **konstantem Frequenzschritt** **f_{n+1} - f_n = 500Hz = const (**
- Aufsteigende Tonfolge
  mit **konstantem Frequenzverhältnis** **f_{n+1} / f_n = sqrt(2) = 1.414 = const**
  d.h. Anstieg um eine halbe Oktave

Wenn wir unserem Auge gleichzeitig Licht verschiedener Wellenlängen anbieten, so ist es nicht in der Lage, die beiden Komponenten aus der Mischung herauszufinden. Wenn ich rotes und grünes Licht mische, sehe ich eben gelb; **das Auge hat nicht die Fähigkeit, spektral aufzulösen. Anders unser Ohr**. Zwei Töne, die in der Frequenz genügend weit auseinander liegen, werden getrennt wahrgenommen.

4.2 Weber Fechnersches Gesetz

Rekapitulation:

Eine Folge von Oktaven entspricht

- musikalisch einer **arithmetischen Folge**,
  d.h. die Differenz zweier benachbarter Tonhöhen ist konstant

- physikalisch einer **geometrischen Folge**,
  d.h. der Quotient zweier benachbarten Frequenzen ist konstant

Merksatz (Psychophysik)

Die menschliche Psyche setzt
eine geometrische Folge physikalischer Reizgrößen

- z.B. Amplituden $A_{n+1} = q \cdot A_n$ *bzw.* $A_n = q^n \cdot A_0$
- bzw. Frequenzen $f_{n+1} = q \cdot f_n$ *bzw.* $f_n = q^n \cdot f_0$

in eine arithmetische Folge psychischer Reizempfindungsgrößen um:

- Lautstärken $L_{n+1} = L_n + \Delta L$ *bzw.* $L_n = n \cdot L_0$
- Tonhöhen $C_{n+1} = C_n + \Delta C$ *bzw.* $C_n = n \cdot C_0$

Sie ist damit einer logarithmischen Funktion vergleichbar:
(Wahrnehmungsstärke proportional zum Logarithmus der Reizintensität)

Oktave	Quint + Quart
log (a * b)	(log a) + (log b)

gr. Sekund	Quint - Quart
log (a / b)	(log a) - (log b)

Weber Fechner:

- Zusammenhang zwischen der Stärke eines **Reizes R**
  und der Stärke der zugehörigen **Sinnesempfindung E**

- Der **gerade wahrnehmbare Unterschied dE**
  zweier Sinneseindrücke ist abhängig von
  - dem Verhältnis der **Änderung eines Reizes dR**
  - zur Stärke des **schon vorhandenen Reizes R**:
    (genauer: Reizintensität R)

$$\boxed{dE \propto \frac{dR}{R} \quad \Leftrightarrow \quad dE = k \cdot \frac{dR}{R} \quad \Rightarrow \quad E(R) \propto \log R}$$

Verhältnis der Reizstärke $\log\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \log R_1 - \log R_2$ **Differenz der Empfindung**

Psycho-physisches Grundgesetz von Weber und Fechner (1834):

Gleiche *Verhältnisse* des Reizes erzeugen gleiche *Stufen* der Reizempfindung.

Sinn:

Unterschiedserkennung über möglichst ausgedehnte Erfahrungsbereiche (Frequenz, Schallintensität, Lichtintensität) hinweg.

Vgl. Logarithmisches Zahlungssystem
(Möglichst jede Zahlungssumme mit möglichst wenig Einzelstufen)

Cents	1	2	5
Cents	10	20	50
Euro	1	2	5
Euro	10	20	50
Euro	100	200	500

4.2.1 Definition der Psychophysik

- Ein **physikalischer Reiz der Größe p** erregt ein Sinnesorgan.
- Das hat beim Beobachter eine **Empfindung der „Stärke“ E** zur Folge.
  - Die Größe des Reizes p können wir äußerlich mit einem physikalischen Messinstrument bestimmen,
  - Die „Stärke“ E der Empfindung kann nur der jeweilige Beobachter selbst innerlich beobachten.

Wie diese beiden Größen, die physikalische Größe p und die psychische Größe E zusammenhängen, wird in der „**Psychophysik**“ untersucht. Hier werden zwei grundsätzlich verschiedenartige Größen miteinander in Beziehung gebracht, eine äußerlich messbare physikalische Größe p und eine nur durch innerliches Erleben bestimmbare psychische Größe E.

4.2.2 Konstruktion einer Empfindungsskala

Um der Empfindung eines Menschen überhaupt sinnvoll Zahlenwerte zuordnen zu können, muss eine Empfindungsskala konstruiert werden. Fechner war der erste, dem dies 1850 sinnvoll gelang (Die Vorgehensweise ist physikalischer Standard):

Gleichheit:

Zwei gleiche Empfindungen E1 und E2 werden durch zwei Reize p1 und p2 verursacht. Dann muss eine eineindeutige Zuordnung gelten:.

$$\mathbf{E(p1) = E(p2)\ \hat{U}\ p1 = p2}$$

Nullpunkt:

Alle Reize p, die unterhalb der Reizschwelle p0 liegen, haben die Empfindung E = 0 zur Folge.

$E(p < p0) = 0$

Einheit:

Zwei Reize p1 und p2, die dieselbe Empfindung der Stärke E1 auslösen, seien vorgegeben. Nun wird die Stärke des Reizes p2 so lange vergrößert, bis der Beobachter die Empfindung, die die beiden Reize bei ihm auslösen, das erste Mal gerade unterscheiden kann, d.h. bis E1 ≠ E2 erstmals erlebt wird. Die Differenz der beiden Reize Δp = p2 - p1, die gerade einen wahrnehmbaren Unterschied in der Empfindungsstärke E auslöst, wird **„Unterschiedsschwelle" JND (just noticeable difference) Dp = p2 - p1** genannt und zur Definition der Einheit der Empfindungsskala verwendet. E2 hat dann den Wert E2 = E1 + 1, wenn p1 um Δp vergrößert wird. Dies ist sinnvoll, da kleinere Reizunterschiede durch unsere Empfindung nicht unterschieden werden können.

4.2.3 Der Zusammenhang der Reizgröße p und der Empfindungsgröße E

- Wie hängen nun die Reizgröße p und die Empfindungsgröße E zusammen. Da wir einen eineindeutigen Zusammenhang vorausgesetzt haben, fragen wir also nach der **Reiz-Empfindungs-Funktion p(E), bzw. deren Umkehrfunktion E(p).**

- Weber untersuchte 1834 die verschiedenen Sinne des Menschen unter der Fragestellung: Ist die Unterschiedsschwelle Δp, die die Zunahme der Empfindungsstärke E um eine Einheit verursacht, immer gleich oder hängt sie von der Stärke der Empfindung E bzw. der Größe des Reizes p ab.

Weber Konstanten:

Die Unterschiedsschwelle (JND = just noticeable difference) Δp ist kein konstanter Wert, sondern von der absoluten Größe der Reizstärke p abhängig: Je größer die Stärke des Reizes p, desto größer muß der Unterschied Δp sein, damit zwei Reize verschieden stark empfunden werden.

$$k = \frac{\Delta p}{p}$$

Die Weber Konstante k bestimmt,
wie groß der Reizschwellenwert relativ zum Reizuntergrund sein muß.

Brightness	0.079
Loudness	0.048
Finger Span	0.022
Heaviness	0.020
Line Length	0.029
Taste (salt)	0.083
Electric Shock	0.013
Vibration (fingertip)	0.036

Das Ergebnis von Weber beschreibt eine fundamentale Gesetzmäßigkeit, wie der Menschen die Welt erlebt. Diese drückt Fechner durch den folgenden Satz anschaulich aus:

„Ein Thaler hat viel weniger Wert für den Reichen als für den Armen, und wenn er einen Bettler einen Tag lang glücklich macht, so wird er als Zuwachs zum Vermögen eines Millionärs gar nicht merklich von diesem gespürt.“

Die Empfindung des „Reichseins“ wächst also
nicht gleichmäßig mit der Geldmenge, die man besitzt.

Löst man diese Webersche Gleichung

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{p(E_n) - p(E_{n-1})}{p(E_{n-1})} = k$$

nach $p(E_n)$ auf, ergibt sich eine Rekursionsformel für exponentielles Wachstum

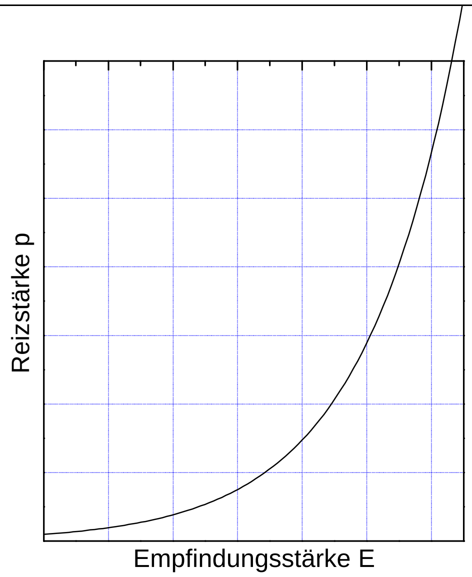
$$\begin{aligned} p(E_n) &= p(\acute{E}_{n-1}) + k \cdot p(E_{n-1}) \\ &= p(E_{n-1})(1+k) \\ &= p(E_0) \cdot (1+k)^n \end{aligned}$$

Ersetzt man die diskreten Werte E_n durch eine kontinuierliche Empfindungsstärke E, so erhält man als
Empfindungs-Reiz-Funktion p(E)

$$p(E) = p(0) \cdot (1+k)^E$$

mit p(0) als Reizstärke eines gewählten Nullpunkt der Empfindungsstärke, d.h. als absolute Reizschwelle.

D.h. bei starken Empfindungen muß der äußere Reiz sehr stark vergrößert werden, um eine Zunahme der Empfindung zu bewirken.



Bsp.: Soll beispielsweise die Helligkeit in einem Zimmer vergrößert werden, kann bei dämmriger Beleuchtung eine Kerze eine große Wirkung haben; bei gleißend heller Beleuchtung wird der Beleuchtungsanteil einer Kerze dagegen überhaupt nicht bemerkt.

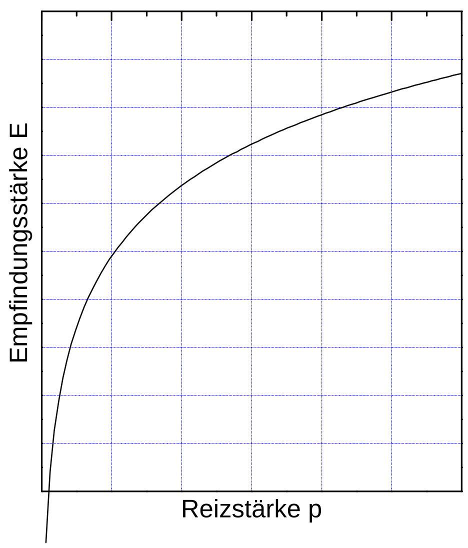
Im täglichen Leben interessiert statt des oben dargestellten Zusammenhangs mehr die Umkehrfunktion, d.h. die **Reiz-Empfindungsfunktion E(p)** als Aussage, wie groß die Empfindungsstärke E bei einer vorgegebenen Reizgröße p ist

$$\log\left(\frac{p(E)}{p(0)}\right) = E(p)\cdot\log(1+k)$$

$$E(p) = \frac{1}{\log(1+k)}\log\left(\frac{p(E)}{p(0)}\right)$$

Das Schaubildes macht deutlich, dass bei kleinen Reizstärke die Sinnesorgane sehr empfindlich sind: eine kleine Zunahme der Reizstärke p hat eine starke Zunahme der Empfindung E zur Folge.

Bei großen Reizstärken p ist das genau umgekehrt: das Sinnesorgan ist sehr unempfindlich, denn um eine Verstärkung der Empfindung zu erreichen, muss der Reiz erheblich verstärkt werden.



Wir empfinden also nicht den Reiz selbst, sondern den Logarithmus des Verhältnisses der Reizgröße zu einem Schwellenwert, bzw. die Hochzahl dieses Verhältnisses.

4.2.4 Der Zusammenhang von Tonhöhe und Frequenz

Definition einer Tonhöhenskala durch

- Zwei Töne mit dem Abstand einer Oktave
  haben einen Tonhöhenunterschied von $\Delta T=1$
- Der als Grundton gewählte Ton hat die Tonhöhe T=0

Für den **Weberquotienten c** gilt demnach:

$$\frac{\Delta f}{f(T-1)} = \frac{f(T)-f(T-1)}{f(T-1)} = \frac{f(T)}{f(T-1)} - 1 = 2-1 = 1 = c$$

$$f(T) = f(0)\cdot(1+c)^T = f(0)\cdot 2^T$$

$$T(f) = \frac{1}{\log 2}\log\left(\frac{f}{f(0)}\right)$$

Logarithmisches Intervallmaß (siehe Weber-Fechner) in Analogie zum Schalldruckpegel:

- Die relativen Frequenzen aufeinanderfolgender Oktaven
  bilden die Potenzreihe von 2

$$Z = 1200\cdot\log_2\frac{f_1}{f_2} = \frac{1200}{\log 2}\cdot\log\frac{f_1}{f_2}$$

- Die dimensionslose Einheit (analog zu dB) wird hier **Cent** genannt
- Der Faktor 1200 entspricht der Vereinbarung,
  die Oktave in 1200 gleiche Intervalle einzuteilen.

- Ein Halbtonschritt entspricht dem Intervallmaß 100 Cent

4.2.5 Der Zusammenhang von Lautstärke und Intensität

Zwei Empfindungsgrenzen:
- Die Hörschwelle (gerade hörbare Intensität)
- Die Schmerzschwelle
- Im Frequenzbereich um 1 kHz umfaßt der durch diese beiden Schwellen definierte Hörbereich 12 Größenordnungen (10^{-12} W/m^2 bis 1 W/m^2) !!!!

Experimentelle Untersuchungen ergeben, daß die Intensität verzehnfacht werden muß, um eine Steigerung des Lautstärkeempfindens um eine Einheit zu erhalten.

$$\frac{\Delta I}{I(L-1)} = \frac{I(L)-I(L-1)}{I(L-1)} = \frac{I(L)}{I(L-1)} - 1 = 10 - 1 = 9 = c \quad damit \quad L(I) = \frac{1}{\log(1+c)} \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

4.3 Hörphysiologie

4.3.1 Aufbau des Ohres

Abb. 1: Das menschliche Ohr [1]

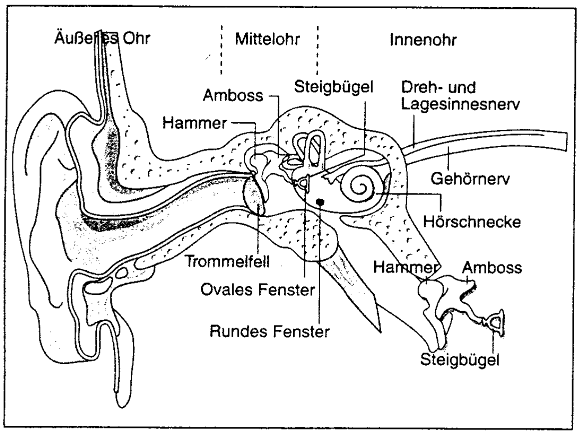
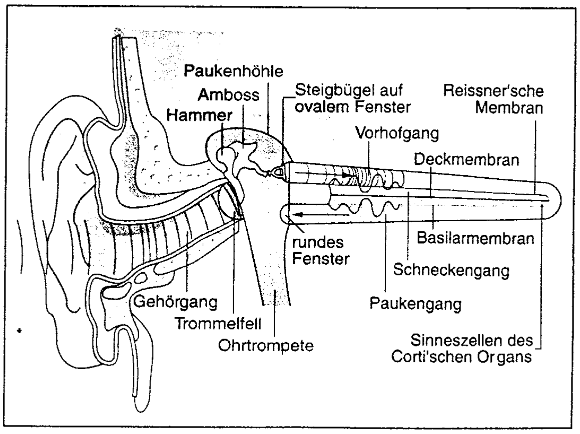


Abb. 2: Bau des Innenohr [1]



Problem:
- Außenohr (Luftgefüllt), 2- bis 3-fache Verstärkung im Gehörgang
- Innenohr (Wassergefüllt, aus der Voramphibienzeit)

hohe Impedanzwiderstand, d.h. großer Anteil von Schallreflexion

(ρLuft cLuft) = 1,29 kg / m3 343 m / s = 442 kg / s m2
(ρH20 cH20) = 998 kg / m3 1485 m / s = 1482030 kg / s m2

Mechanische Impedanzanpassung im Mittelohr (bis max. 2 kHz)

- **Trommelfell**
  (kreisrunde, nach innen trichterförmige Membran mit 10 mm Durchmesser)
  - Schallschwingungen ⇒ mechanische Schwingungen
  - Amplituden bis herab zu 10E–11 m (d.h. 1/10 Atomradius)

- **Gehörknöchelchen (Hammer, Amboß, Steigbügel)**
- Die Gehörknöchelchen wandeln Schwingungen
  großer Amplitude und kleiner Kraft (Trommelfell) in solche
  kleiner Amplitude und großer Kraft (Ovales Fenster) um.
- Hebelwirkung (a2/a1 = 1,3)
- Kraftübertragung aufs Ovale Fenster
  (Flächenverhältnis A2/A1 = 20)

- **Mittelohr** (Trommelfell, Gehörknöchelchen, Ovales Fenster)
  ist über die 35 mm lange **Ohrtrompete (Eustachische Röhre)**
  mit dem Nasen-Rachen-Raum (zwecks Druckausgleich) verbunden.

Nächstes Problem (Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle):
- Schnelle Luftdruckschwankungen
  in langsame Flüssigkeitsschwankungen (?????) umzuwandeln

Innenohr

- **Schnecke (Cochlea)** gefüllt mit Perilymphe
  - Vorhofgang (Scala Vestibuli) hinter dem ovalen Fenster mit Steigbügel

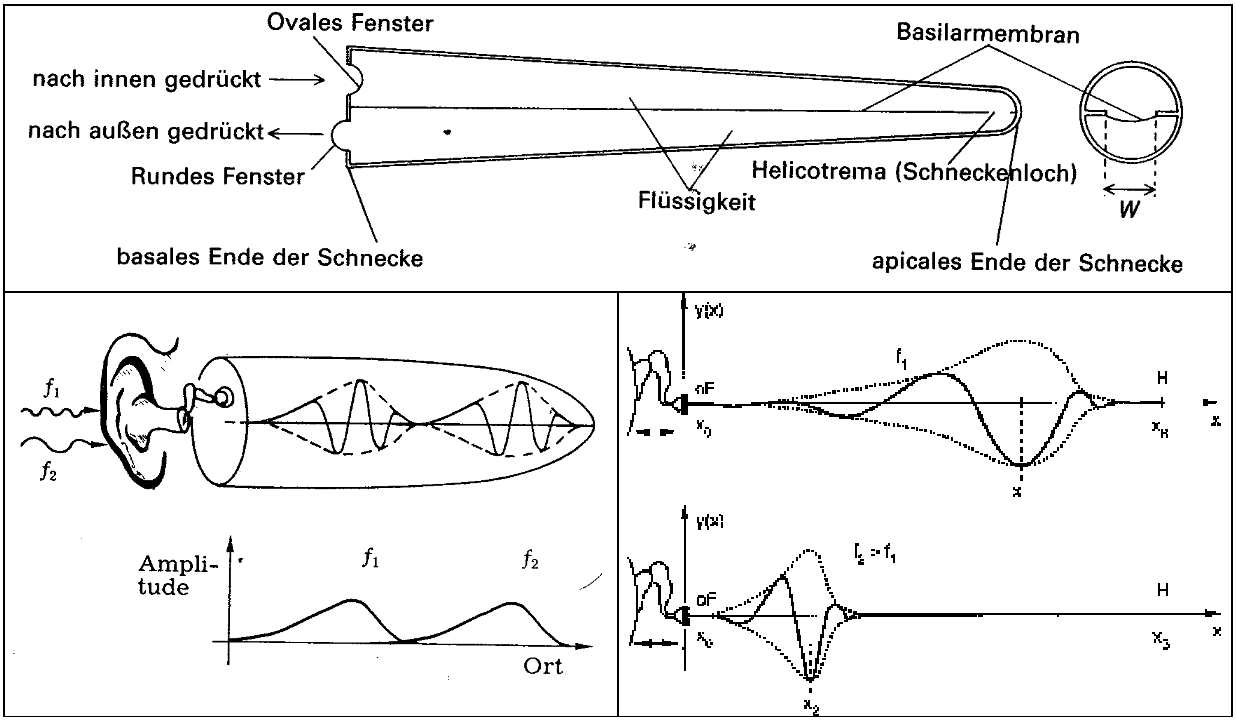
    - Paukengang (Scala Timpani) hinter dem runden Fenster
    - Schneckenspitze bzw. -loch (Helicotrema)

- **Schneckengang mit Basilarmembran**
    - Länge 35 mm,
    - Breite 0,04 mm (ovales Fenster) bis 0,49 mm (Helicotrema)
    - Darauf befindet sich das **Cortische Organ:**
        - 3500 Haarzellengruppen mit 20.000 Hörfasern
        - Gehörnerven enden an den Rezeptorzellen (Haarzellen)

4.3.2 Frequenzanalyse / Ortstheorie des Höhrens

- Basilarmembran wird durch Flüssigkeitsschwingungen zu **Wanderwellenbewegung** (Transversalbewegung der B-Membran) angeregt

- Unterschiedliche, vom Ort abhängige mechanische Eigenschaften der Basilarmembran führen dazu, daß die Wanderwellen wie Brandungswellen nach einem **ortsabhängigen maximalen Aufsteilen** aufgrund von Reibungskraften zusammenbrechen.



Maximum hängt von der Frequenz ab
(Wanderwellendispersion, von Békésy, Nobelpreis 1961)
    - hohe Frequenz ⇒ am Ovalen Fenster
    - niedrige Frequenz ⇒ am Helicotrema

- Jede Frequenz wird auf eine andere Stelle des Ohres abgebildet
- Töne verschiedener Frequenz erregen unterschiedliche örtliche (log → linear) Bereiche auf der Basilarmembran
- Mechanisches Modell gekoppelter Pendel mit unterschiedlicher Pendellänge

- Die hohe Frequenz- bzw. Tonhöhen-Auflösung erfolgt durch eine Konstrastverschärfung im Nervensystem (d.h. nicht physikalisch)
- Tätsächliche Auslenkungen im Bereich 10^{-10} m (an der Hörschwelle)
- menschlicher Hörbereich Merkregel 20 Hz - 20 kHz (d.h. 3 Zehnerpotenzen)

- Der für den mittleren Frequenzbereich (1-3 kHz) zuständige Ortsbereich der Basilarmembran ist weiter auseinandergezogen
- Der 2,7 cm lange Gehörgang zwischen Ohrmuschel und Trommelfell wirkt als breitbandiger Resonator mit einer Resonanzfrequenz von etwa 2700 Hz
- Tonhöhenunterscheidung in diesem Frequenzbereich besonders ausgeprägt

- **Übertragung durch Mittelohr nur bis 2000 Hz (darüber funktionierts nur mit Knochenleitung)**

- Nichtlineares Verhalten im Mittel- und Innenohr führt zu Kombinationstönen

4.3.3 Lautstärkeempfinden

- Schallintensität [W / m^2]
  = Schallleistung / Querschnittsfläche
  = Schallenergie / (Querschnittsfläche Zeit)

Weber Fechner

⇒ Einführung einer Pseudoeinheit namens Dezibel dB,
welche die **menschliche Empfindung (z.B. Höreindruck) nachbilden** soll und
ein **logarithmisches Maß des Verhältnisses zweier physikalischer Reizstärken**,
z.B. der Schallintensität I oder Schalldruck p ist
(aber nicht auf Schallgrößen beschränkt ist !!!)

$$E\,[dB] = 10 \cdot \log \frac{R}{R_0}$$

Bemerkung:

- Die **Pseudoeinheit Bel** wurde festgelegt mit log(R/R_0). Als die Akustiker feststellten, daß das durchschnittliche subjektive Unterscheidungsvermögen bei ca. 1/10 dieses Wertes lag, wurde die heute gebräuchliche Pseudoeinheit Dezibel [dB] eingeführt. D.h. 1dB beschreibt eine Zunahme des Lautstärkepegels, die gerade noch wahrnehmbar ist.

- Die Pseudoeinheit dB kann stehen
  - sowohl für **Pegeldifferenzen** (relative Pegel)
  - als auch für **absolute Größen** (bezogen auf einen Bezugswert)

- Der resultierende Pegel bei der Addition von Schallgrößen ist nicht die Summe der Einzelpegel !

- Die Bezugsreizstärke R_0 stellt die Normierung dieser Logarithmusfunktion (log1=0) dar,

$$E[dB] = 0 \quad für \quad R = R_0$$

und kann frei gewählt (muß aber angegeben) werden.

Schallbeschreibungsgrößen			
Physikalisch			Physiologisch
Schalldruck [Pa]	**Schallleistung [W]**	**Schallintensität [W/m2]**	
	abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit [J/s]	Schallleistung durch senkrechte Fläche	
Schalldruckpegel	**Schallleistungspegel**	**Schallintensitätspegel**	**Lautstärkepegel**
[dB]	[dB]	[dB]	[dB(A)] Phon
20 log [p/p$_0$]	**10 log [P/P$_0$]**	**10 log [I / I$_0$]**	
Schalldruck amplitude p	Schallleistung P = k p^2	Schallintensität I = P/A	

Schallintensitätpegel	$E = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10 \cdot \log\left(\frac{P/A}{P_0/A}\right)$
Schallleistungspegel	$= 10 \cdot \log \frac{P}{P_0} = 10 \cdot \log\left(\frac{k \cdot p^2}{k \cdot p_0^2}\right)$
Schalldruckpegel	$= 20 \cdot \log \frac{p}{p_0}$

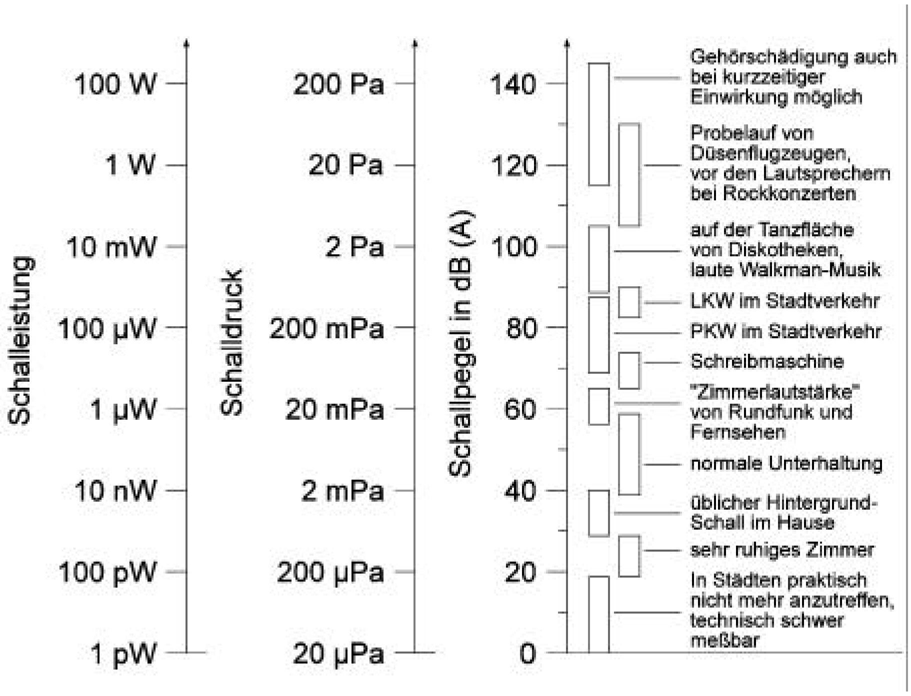
⇒ Für die **absoluten Schallpegelwerte**
wählt man die jeweiligen Reizstärken an der Hörschwelle als Bezugsgröße R_0:

Schallgröße bei **f = 1000 Hz**		**Hörschwelle**	**Schmerzschwelle**
Schallschnelle	[m/s]	50 E –9	0,25
Ausschlagamplitude	[m]	20 E –12	1 E –9
Schalldruck	**[Pa]**	**20 E -6**	**60**
Schallintensität	**[W/m2]**	**10 E -12**	**10**
Schallpegel	**[dB]**	**0**	**130**

Einfache dB-Regel
(Merke: 10 dB entspricht einer Verdopplung bzw. Halbierung des Schallempfindens)

doppelte Intensität	I2 / I1 = 2	E = 10 log 2	= 3 dB
10 fache Intensität	I2 / I1 = 10	E = 10 log 10	= 10 dB
100 fache Intensität	I2 / I1 = 100	E = 10 log 100	= 20 dB
1000 fache Intensität	I2 / I1 = 1000	E = 10 log 1000	= 30 dB

Intensität [10E-12 W/m2]	**L [dB]**	**Beispiel**
1	0	Hörschwelle
100	20	Flüstern
10000	40	normale Unterhaltung
1000000	60	Bürogeräusche
100000000	80	Motorrad mit Schalldämpfer
10000000000	100	Motorrad ohne Schalldämpfer
10000000000000	130	Schmerzschwelle



Der **Frequenzabhängigkeit des Hörbereichs**
wird durch die Phonskala oder dBA Skala genügt:

- Töne derselben Intensität I werden
  bei unterschiedlicher Frequenz verschieden laut empfunden.
- Diese psychophysikalische Eigenschaft wird in einer weiteren Messgröße, der „**Lautheit**“ berücksichtigt. Die Maßeinheit dieser Größe ist 1 **Phon**.

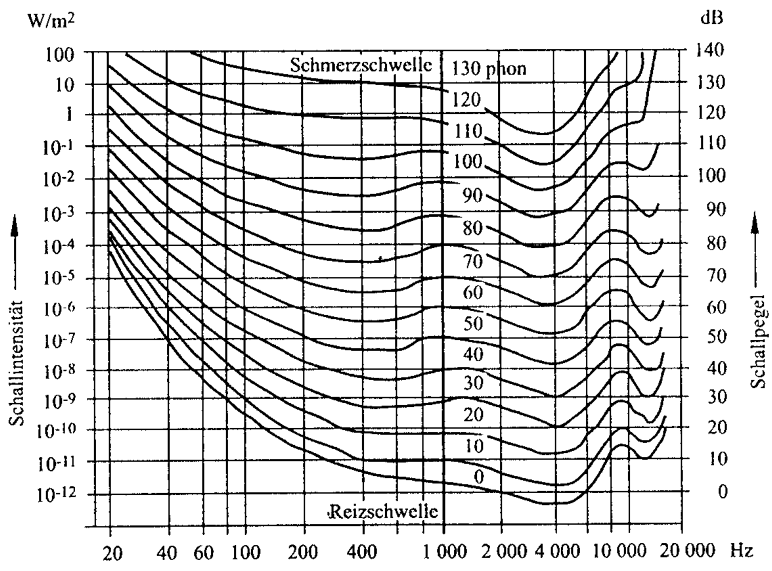


Abb. 45 Kurven gleicher Lautstärke nach *Robinson* und *Dadson*

- **Alle Töne einer Isophonen haben dieselbe Lautheit.**

- Für Töne mit 1000 Hz entspricht die Intensität I des Tones,
  üblicherweise in dB angegeben, der in Phon angegebenen Lautheit.
- Geeignete Testfrequenzen zum Abfahren des Hörbereichs [Hz]:
  70, 100, 200, 500, 1000, 2000, 3000, 4000, 6000, 8000, 10000, 12000

4.4 Akustische Täuschungen

4.4.1 Kombinationstöne / Nichtlinearitäten

- Nichtlineares Kraftgesetz / Grenzen des Superpositionsprinzips
- d.h. Wechselwirkung zweier Wellen untereinander
- Kombinationstöne $f_{Kombi} = mf_1 \pm nf_2$
- Besonders deutlich sind der quadratische Differenzton f1-f2 und der kubische Differenzton 2f2-f1
- Diese Kombinationstöne hört man auch bei überlasteten Verstärkern;
  diesmal durch die technisch bedingten Nichtlinearitäten des Verstärkers

4.4.2 Residuumstöne / Fehlender Grundton

4.4.3 Shepard Tonfolge